



第五章

三角函数

5.1 任意角和弧度制

5.1.1 任意角



基础上分

1. D 【解析】∵ 分针是顺时针走的, ∴ 形成的角是负角, 又分针走过了 10 分钟, ∴ 走过的角度大小为 $\frac{10}{60} \times 360^\circ = 60^\circ$, ∴ 分针走过的角度是 -60° . 故选 D.

2. A 【解析】小于 90° 的角, 比如 -60° , 不是锐角, 故①错误;
第二象限的角, 比如 -240° , 不是钝角, 故②错误;
终边重合的角, 比如 30° 与 390° , 不相等, 故③错误;
相等的角终边一定重合, 故④正确.

3. ABD 【解析】 $423^\circ = 63^\circ + 360^\circ$, 即 63° 角与 423° 角终边相同, A 正确;
 $1\,143^\circ = 63^\circ + 3 \times 360^\circ$, 即 63° 角与 $1\,143^\circ$ 角终边相同, B 正确;
 $-117^\circ = 63^\circ - 180^\circ$, 即 63° 角与 -117° 角终边不相同, C 错误;
 $-297^\circ = 63^\circ - 360^\circ$, 即 63° 角与 -297° 角终边相同, D 正确. 故选 ABD.

4. D 【解析】∵ 角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称, ∴ $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$,
即 $\alpha+\beta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$. 故 D 正确.

易错警示 轴对称的特征表示错误而出错

角 α, β 的终边关于 y 轴对称时,
其关系为 $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$,
此处表示容易出现错误, 需要注意.

5. C 【解析】当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 45^\circ \leq \alpha \leq n \cdot 360^\circ + 90^\circ$, 此时 α 对应的阴影部分与 $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ 对应的阴影部分一致;
当 $k = 2n+1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 225^\circ \leq \alpha \leq n \cdot 360^\circ + 270^\circ$, 此时 α 对应的阴影部分与 $225^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ 对应的阴影部分一致. 故选 C.



6. C 【解析】根据象限角的定义, 因为 $180^\circ < 200^\circ < 270^\circ$, 所以 200° 是第三象限角, 故选 C.

7. AB 【解析】因为 α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称, 而 α 是第二象限角, 所以 $-\alpha$ 是第三象限角, 所以 $180^\circ - \alpha$ 是第一象限角, 故 A 正确, D 错误;

因为 α 是第二象限角, 所以 $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $45^\circ + k \cdot$

$180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一

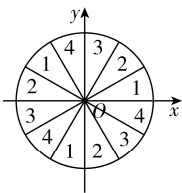
或第三象限角, 故 B 正确;

因为 α 是第二象限角, 所以 $270^\circ + \alpha$ 是第一象限角, 故 C 错误.



对点上分

1. B 【解析】将每个象限三等分, 从 x 轴非负半轴起按逆时针方向依次循环标序号 1, 2, 3, 4, 如图. 根据角 α 的终



边在第三象限, 观察到序号 3 未在第二象限出现, 所以 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边不可能在第二象限.

一题多解

因为角 α 的终边在第三象限, 所以 $180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot$

$360^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 即 $60^\circ + k \cdot 120^\circ < \frac{\alpha}{3} < 90^\circ + k \cdot 120^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

当 $k = 3m, m \in \mathbf{Z}$ 时, $60^\circ + m \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < 90^\circ + m \cdot 360^\circ (m \in \mathbf{Z})$, 此时 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一象限;

当 $k = 3m + 1, m \in \mathbf{Z}$ 时, $180^\circ + m \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < 210^\circ + m \cdot 360^\circ (m \in \mathbf{Z})$, 此时 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第三象限;

当 $k = 3m + 2, m \in \mathbf{Z}$ 时, $300^\circ + m \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < 330^\circ + m \cdot 360^\circ (m \in \mathbf{Z})$, 此时 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第四象限.

综上所述可知 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边不可能在第二象限.

2. 第三象限或第四象限或 y 轴负半轴 【解析】由于 α 是第四象限角, 故 $k \cdot 360^\circ -$



$90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故 $k \cdot 720^\circ - 180^\circ < 2\alpha < k \cdot 720^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 即 2α 的终边在第三象限或第四象限或 y 轴负半轴.

5.1.2 弧度制



基础上分

1. D 【解析】根据角度和弧度的概念可知二者都是角的度量单位, 1° 的角是周角的

$\frac{1}{360}$, 1 rad 的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$, 故 A, B 正确;

$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ > 1^\circ$, 故 C 正确;

无论哪种角的度量方法, 角的大小都与圆的半径无关, 只与角的始边和终边的位置有关, 故 D 错误.

易错警示

容易误认为弧度制下角的大小与圆的半径有关, 实际上弧度值是由比值确定的, 与圆的半径无关.

2. C 【解析】依题意, 二十四节气将一个圆

24 等分, 所以每一份的弧度数为 $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$,

从谷雨到大雪, 二十四节气圆上一点需要

顺时针旋转 15 个格, 所以 $|\alpha| = 15 \times \frac{\pi}{12} =$

$\frac{5\pi}{4}$. 故选 C.

关键点拨

解决传统文化背景的数学问题, 关键是将实际问题转化为数学模型, 明确等分关系.

3. B 【解析】 $540^\circ = 540 \times \frac{\pi}{180} = 3\pi$.

关键点拨

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ$$

4. ABD 【解析】 $112^\circ 30' = 112.5^\circ$, 化成弧度

是 $\frac{\pi}{180} \times 112.5 = \frac{5}{8}\pi$, 故 A 正确;

$-\frac{5}{3}\pi = -\frac{5}{3} \times 180^\circ = -300^\circ$, 故 B 正确;

$-150^\circ = -150 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$, 故 C 错误;

$\frac{\pi}{12} = \frac{1}{12} \times 180^\circ = 15^\circ$, 故 D 正确.



5. $\beta < \alpha < \theta$ 【解析】因为 $\beta = \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ =$

$$30^\circ, \theta = 2 \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 2 \times 57.3^\circ = 114.6^\circ,$$

→ **关键点** 比较不同单位的角时, 先统一为弧度制或角度制, 再比较数值
所以 $\beta < \alpha < \theta$.

6. B 【解析】 $\because 45^\circ - (-45^\circ) = 90^\circ$, 90° 不是 360° 的整数倍,

$\therefore 45^\circ$ 角与 -45° 角终边不相同, 故 A 错误.

$$\because 800^\circ - 80^\circ = 720^\circ, 720^\circ = 2 \times 360^\circ,$$

$\therefore 80^\circ$ 角与 800° 角终边相同, 故 B 正确.

$$\because 4\pi - \pi = 3\pi, 3\pi \text{ 不是 } 2\pi \text{ 的整数倍},$$

$\therefore \pi$ 与 4π 终边不相同, 故 C 错误.

$$\because \frac{11\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\pi, 7\pi \text{ 不是 } 2\pi \text{ 的整数倍},$$

$$\therefore -\frac{3\pi}{2} \text{ 与 } \frac{11\pi}{2} \text{ 终边不相同, 故 D 错误. 故}$$

选 B.

方法总结

弧度制下与角 α 的终边相同的角 β 可以表示为 $\beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbf{Z}$, 即与角 α 终边相同的角可以表示成 α 加上 2π 的整数倍. 应注意:

(1) 角度与弧度不能混用;

(2) 表示终边相同的角需加 $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

7. D 【解析】在同一个表达式中, 角度制与弧度制不能混用, 所以 A, B 错误.

$$\text{与 } \frac{9\pi}{4} \text{ 终边相同的角可以写成 } 2k\pi + \frac{9\pi}{4}$$

$(k \in \mathbf{Z})$ 的形式,

$$\text{当 } k = -2 \text{ 时, } 2k\pi + \frac{9\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}, 315^\circ \text{ 换算成}$$

$$\text{弧度制为 } \frac{7\pi}{4}, \text{ 所以 C 错误, D 正确.}$$

故选 D.

8. C 【解析】 \because 角 α 的终边为射线 OP , 且射线 OP_1 与 OP 关于 y 轴对称,

$$\therefore \text{以 } OP_1 \text{ 为终边的角的集合为 } \{\alpha_1 \mid \alpha_1 = 2m\pi + \pi - \alpha, m \in \mathbf{Z}\},$$

又 \because 射线 OP_2 与 OP_1 关于直线 $y = -x$ 对称,

$$\therefore \text{以 } OP_2 \text{ 为终边的角 } \beta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha_1 =$$

$$2(n - m - 1)\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha, n, k \in$$

$$\mathbf{Z}, \text{ 即所求集合为 } \left\{ \beta \mid \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha, \right.$$



$k \in \mathbf{Z}\}$. 故选 C.

9. $-\frac{4\pi}{9}$ 【解析】因为 $\alpha = -\frac{40}{9}\pi = -2 \times 2\pi - \frac{4\pi}{9}$, β 与 α 的终边相同, 且 $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\beta = -\frac{4\pi}{9}$.

10. 【解】(1) 因为 $\alpha = 1\,200^\circ = 1\,200 \times \frac{\pi}{180} = \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 3 \times 2\pi$, 所以角 α 与 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边相同, 且 $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$, 所以角 α 是第二象限角.

(2) 题图①: 因为 $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$, $330^\circ = \frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, 所以阴影部分内(不包括边界)的角的集合为 $\left\{ \theta \mid 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

题图②: 因为 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $210^\circ = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$, 所以阴影部分内(不包括边界)的角的集合为 $\left\{ \theta \mid k\pi + \frac{\pi}{6} < \theta < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

11. B 【解析】设扇形的半径为 r , 则 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times r^2 = 4$, $\therefore r = 2$, 则扇形的弧长为 $2 \times 2 = 4$, 故扇形周长为 $2r + 4 = 8$, 故选 B.

12. ACD 【解析】如图, 延长 AB 使其与 DC 的延长线交于点 O ,

易得 $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, 得 $AO = DO = 4$,

所以 $\triangle AOD$ 为等边三角形, $\angle BOC = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$,

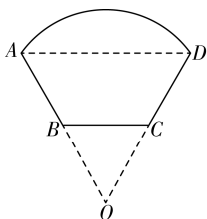
所以 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 得 $\widehat{AD} = AO$.

$\angle BOC = \frac{4\pi}{3}$,

该平面图形的周长为 $2 \times 3 + \frac{4\pi}{3} = 6 + \frac{4\pi}{3}$,

面积为 $\frac{1}{2}\widehat{AD} \cdot AO - \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}$.

故选 ACD.



13. $\frac{1}{2}$ 【解析】设扇形的圆心角为 α , 由弧度的定义可得 $\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

14. 【解】(1) 设该扇形菜地的半径为 r , 弧长为 l , 圆心角为 α , 则 $\begin{cases} l+2r=24, \\ l=\alpha r=4r, \end{cases}$ 解

$$\text{得} \begin{cases} l=16, \\ r=4, \end{cases}$$

故该扇形菜地的面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$ (平方米).

(2) 因为 $l+2r=24$, 所以 $l=24-2r$, 则 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(24-2r)r = -r^2 + 12r = -(r-6)^2 + 36$.

当 $r=6$ 时, S 取得最大值 36, 此时 $l=12$,

从而 $\alpha = \frac{l}{r} = 2$.

故该扇形菜地的圆心角为 2 弧度时, 菜地的面积取得最大值 36 平方米.

15. 【解】(1) 利用扇形的面积公式可得 $\frac{1}{2}\theta \times 20^2 - \frac{1}{2}\theta x^2 = 100$, 所以 $\theta = \frac{200}{400-x^2}$ ($0 < x < 20$).

(2) 依题意可得 $\widehat{AD} = x\theta$, $\widehat{BC} = 20\theta$, 所以栅栏的长度 $y = x\theta + 20\theta + 2 \times (20-x)$,

将 $\theta = \frac{200}{400-x^2}$ 代入上式, 整理可得 $y =$

$$2(20-x) + \frac{200}{20-x} = 2 \left(20-x + \frac{100}{20-x} \right) \geq$$

$$4\sqrt{(20-x) \times \frac{100}{20-x}} = 40,$$

当且仅当 $x=10$ 时取等号, 所以当 $x=10$ 时, y 取最小值 40.

5.1 节测上分

1. A 【解析】 $37^\circ 30' = \frac{1}{2} \times 75^\circ = \frac{75}{2} \times \frac{\pi}{180} =$

$$\frac{5\pi}{24}. \text{ 故选 A.}$$

2. B 【解析】由 α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称, 可知若 α 是第二象限角, 则 $-\alpha$ 是第三象限角, 所以 $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ 是第二象限角. 故



选 B.

快解

令 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 则 $-\frac{\pi}{2} - \alpha = -\frac{7\pi}{6}$, 为第二象限角, 故选 B.

3. A 【解析】由于集合 $A = \left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 所以集合 A 为终边落在 y 轴上的角的集合;

由于集合 $B = \left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 所以集合 B 为终边落在 y 轴上的角的集合. 所以 $A=B$. 故选 A.

4. A 【解析】设 $\triangle ABC$ 的边长为 a , \widehat{AB} 的长度为 $\frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \times 2a = \frac{6\pi}{3}$, 解得 $a=6$,

以 A 为圆心, AB 长为半径的扇形 ABC 的面积为 $\frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \times 6^2 = 6\pi$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$,

则该勒洛三角形的面积为 $3 \times 6\pi - 2 \times 9\sqrt{3} = 18\pi - 18\sqrt{3}$. 故选 A.

5. BCD 【解析】对于 A, $-\pi \text{ rad} = -180^\circ$, 故 A 正确;

对于 B, -300° 是第一象限角, 但不是锐角, 故 B 不正确;

对于 C, 设扇形半径为 r , 圆心角为 θ , 则面积为 $S_1 = \frac{1}{2} \theta r^2$, 若半径扩大一倍, 圆心角减小一半, 则此时的面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{2} \times (2r)^2 = \theta r^2$, 故 C 不正确;

对于 D, 若 α 为第二象限角, 则 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $4k\pi + \pi < 2\alpha < 4k\pi + 2\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 2α 可能是第三象限角, 也可能是第四象限角, 也可能终边在 y 轴的负半轴上, 故 D 不正确. 故选 BCD.

6. ACD 【解析】对于 A, 终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 终边落在直线 $y=-x$ 上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

所以终边在直线 $y = \pm x$ 上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, A 正确;

对于 B, 终边落在第二象限的角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 所以角



α 不一定为钝角, 例如 $\alpha = \frac{17\pi}{6}$, B 错误;

对于 C, 因为角 α 是第一象限角, 所以

$$\left\{ \alpha \mid 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\},$$

$$\text{所以 } \frac{2k\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{6} -$$

$$\frac{2k\pi}{3} < -\frac{\alpha}{3} < -\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k = 3n \text{ 时, } -\frac{\pi}{6} - 2n\pi < -\frac{\alpha}{3} < -2n\pi, n \in$$

\mathbf{Z} , 位于第四象限,

$$\text{当 } k = 3n + 1 \text{ 时, } -\frac{5\pi}{6} - 2n\pi < -\frac{\alpha}{3} < -\frac{2\pi}{3} -$$

$2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 位于第三象限,

$$\text{当 } k = 3n + 2 \text{ 时, } -\frac{3\pi}{2} - 2n\pi < -\frac{\alpha}{3} < -\frac{4\pi}{3} -$$

$2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 位于第二象限,

所以 $-\frac{\alpha}{3}$ 为第二或第三或第四象限角, C

正确;

对于 D, 设扇形的半径为 R , 扇形的圆心角

为 α , 则扇形的面积 $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$, 所以

$$R = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}},$$

设扇形的周长为 p , 弧长为 l , 则 $p = 2R + l =$

$$(2 + \alpha) R = (2 + \alpha) \sqrt{\frac{2S}{\alpha}} = \sqrt{2S} \times$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} \right) \geq \sqrt{2S} \times 2 \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \times \sqrt{\alpha}} = 4\sqrt{S}, \text{ 当}$$

且仅当 $\frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}$, 即 $\alpha = 2$ 时, 周长取得最小

值 $4\sqrt{S}$, D 正确. 故选 ACD.

7.6



思路导引

本题考查弧长的有关计算, 设所在扇形的圆心角为 α , 中周对应的半径为 r 步, 则外周对应的半径为 $(r+5)$ 步, 列出方程组即可求解.

【解析】设所在扇形的圆心角为 α , 中周对应的半径为 r 步, 则外周对应的半径为 $(r+$

$$5) \text{ 步, 则 } \begin{cases} \alpha r = 92, \\ \alpha(r+5) = 122, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \alpha = 6, \\ r = \frac{46}{3}, \end{cases} \text{ 即所}$$

在扇形的圆心角大小为 6.

8. $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$

【解析】因为正六边形 $ABCDEF$

的边长为 1, 所以正六边形 $ABCDEF$ 的面

积为 $6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 扇形 ABF 的面积



为 $\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, 所以阴影部分的面积

为 $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$.

9. 【解】 (1) 在扇形 OAD 中, 由题意得 $AB = x$ m, $OA = 2x$ m,

由扇形面积公式得扇形 OAD 的面积为

$2x \times 2x \times \frac{1}{2} \times \theta = 2x^2 \theta$ (m²), 扇形 OBC 的面

积为 $x \times x \times \frac{1}{2} \times \theta = \frac{1}{2} x^2 \theta$ (m²), 故 $y = 2x^2 \theta -$

$\frac{1}{2} x^2 \theta = \frac{3}{2} x^2 \theta$, 由弧长公式得 \widehat{BC} 的长度

为 $x\theta$ m, \widehat{AD} 的长度为 $2x\theta$ m, 而园圃的外

围周长为 50 m, 故 $x\theta + 2x\theta + x + x = 50$, 解得

$$\theta = \frac{50-2x}{3x},$$

因为圆心角 θ 小于 π , 所以 $0 < \frac{50-2x}{3x} < \pi$,

解得 $\frac{50}{3\pi+2} < x < 25$, 而 $x \in (0, 10]$, 故 $x \in$

$\left(\frac{50}{3\pi+2}, 10\right]$, 故 $y = \frac{3}{2} x^2 \times \frac{50-2x}{3x} = 25x - x^2$,

该函数的定义域为 $\left(\frac{50}{3\pi+2}, 10\right]$.

(2) 由二次函数性质得 y 在 $\left(\frac{50}{3\pi+2}, 10\right]$ 内

单调递增, 当 $x = 10$ 时, y 的最大值为 $y =$

$25 \times 10 - 10^2 = 150$, 此时 \widehat{AD} 的长度为 $2x \times$

$\frac{50-2x}{3x} = \frac{2(50-2 \times 10)}{3} = 20$ (m), \widehat{BC} 的长度

为 $x \times \frac{50-2x}{3x} = \frac{50-2 \times 10}{3} = 10$ (m).

5.2 三角函数的概念

5.2.1 三角函数的概念



基础上分

1. B 【解析】 因为角 α 终边上有一点

$P(-8, 6)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = \frac{6}{10} =$

$\frac{3}{5}$. 故选 B.

2. C 【解析】 由题意可知点 P 与原点的距

离 $r = \sqrt{2+m^2}$, 且 $m < 0$, 则 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{r} =$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 解得 $m = -\sqrt{14}$. 故选 C.

3. D 【解析】 因为 $f(x) = \log_a(x+2) + 2$ 的图

象经过定点 P , 所以点 P 的坐标为 $(-1,$

$2)$, 故 $\tan \theta = -2$, 故选 D.



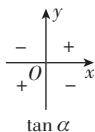
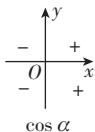
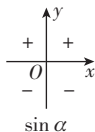
4. B 【解析】依题意 $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{8}$, 所以 $\tan \alpha = \frac{5}{8}$, 所以 $\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2\tan \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2}{2 \times \frac{5}{8}} = \frac{39}{80}$. 故

选 B.

5. BD 【解析】对于 A, 10° 是第一象限角, 则 $\sin 10^\circ > 0$, 故 A 错误;
对于 B, -220° 是第二象限角, 则 $\cos(-220^\circ) < 0$, 故 B 正确;
对于 C, $\sin \pi = 0$, 故 C 错误;
对于 D, $\cos \pi = -1$, 故 D 正确. 故选 BD.

方法总结 三角函数值在各象限的符号

口诀概括为: 一全正、二正弦、三正切、四余弦(如图).



6. D 【解析】因为角 θ 的终边过点 $M(-2, 3)$, 所以 θ 为第二象限角, 所以 $\sin \theta > 0$, $\tan \theta < 0$, 所以 $P(\sin \theta, \tan \theta)$ 位于第四象限. 故选 D.

7. A 【解析】当 θ 为锐角时, $\sin \theta > 0$ 且 $\cos \theta > 0$; 当 $\sin \theta > 0$ 且 $\cos \theta < 0$ 时, θ 为第二象限角, 此时 θ 不一定为锐角, 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

8. CD 【解析】由角 α 的终边在第四象限,

$$\text{得 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

则 $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 因此 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角.

$$\text{当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第二象限角时, } \frac{3\sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} -$$

$$\frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} - \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right|} = 3 - (-2) - (-1) = 6;$$

$$\text{当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第四象限角时, } \frac{3\sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} -$$

$$\frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} - \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right|} = -3 - 2 - (-1) = -4.$$



故选 CD.

9. B 【解析】 $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{17\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$

10. $\frac{\sqrt{6}+1}{4}$ 【解析】 $\sin(-1395^\circ)\cos 1110^\circ + \cos(-1020^\circ)\sin 750^\circ$
 $= \sin(-1440^\circ + 45^\circ)\cos(1080^\circ + 30^\circ) + \cos(-1080^\circ + 60^\circ)\sin(720^\circ + 30^\circ)$
 $= \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 60^\circ\sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+1}{4}.$

11. 【解】 \because 角 α 的终边经过点 $P(x, 4)$,
 且 $\cos(\alpha + 2022\pi) = \cos \alpha = \frac{x}{5}$,
 $\therefore \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{5}$, 解得 $x=0$ 或 $x=3$
 或 $x=-3$, $\therefore P(0, 4)$ 或 $P(\pm 3, 4)$,
 $\therefore \sin \alpha = 1$ 或 $\frac{4}{5}.$

5.2.2 同角三角函数的基本关系



基础上分

1. D 【解析】因为 $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, 且 α 是第三象限角, 所以 $\sin \alpha = -\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$
 故选 D.

2. A 【解析】因为 $\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} = 2$, 所以 $\sin \theta = 2(1-\cos \theta)$, 且 $\cos \theta \neq 1$, 联立方程

$$\begin{cases} \sin \theta = 2(1-\cos \theta), \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{4}{5}, \\ \cos \theta = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin \theta = 0, \\ \cos \theta = 1 \end{cases} \text{ (舍去), 所以 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{4}{5}, \\ \cos \theta = \frac{3}{5}. \end{cases} \text{ 故}$$

选 A.

易错警示 忽略题目中的隐含条件致错

注意本题中, $\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} = 2$ 的分母不能为 0, 因此 $\cos \theta$ 不能等于 1, 本题易错选 C.

3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】因为 $\frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - 1} =$



$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = -1, \text{ 且 } \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = -\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. B 【解析】联立
$$\begin{cases} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha = 1, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \end{cases}$$

又角 α 的终边不在 y 轴上, 解得

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{3}, \\ \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \end{cases} \text{ 则 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ 故选 B.}$$

5. 1



思路导引 对于齐次式的求值, 可利用同角三角函数的基本关系, 将弦的齐次式化成正切形式即可求值.

【解析】
$$\frac{\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta}{3\sin \theta \cos \theta} = \frac{\tan^2 \theta + 2}{3\tan \theta} = \frac{2^2 + 2}{3 \times 2} = 1.$$

6. $\frac{7}{5}$ 【解析】方法一: 因为角 α 的终边落在射线 $y = 2x (x \geq 0)$ 上, 所以不妨设角 α 的终边过点 $P(1, 2)$, 则 $|OP| = \sqrt{5}$ (O 为坐标原点),

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } 2\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{7}{5}.$$

方法二: 由题易知 $\tan \alpha = 2$, 所以

$$\begin{aligned} 2\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{2\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \\ \frac{2\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} &= \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

7. C 【解析】因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha > 0$,

因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以等式两边平方

$$\text{可得 } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4},$$

可得 $2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$, 则 $\cos \alpha < 0$, 所以

$\sin \alpha - \cos \alpha > 0$, 因为 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 -$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ 所以 } \sin \alpha -$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ 故选 C.}$$

8. C 【解析】因为关于 x 的一元二次方程

$$x^2 - \frac{1}{5}x + m = 0 \text{ 的两根分别为 } \sin \alpha, \cos \alpha,$$

所以 $\Delta = \frac{1}{25} - 4m > 0$, 可得 $m < \frac{1}{100}$, 由根与

$$\text{系数的关系可得 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5},$$



$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = m,$$

$$\text{所以 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{25}, \text{ 解得}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{12}{25}, \text{ 即 } m = -\frac{12}{25}. \text{ 故选 C.}$$

9. $-\frac{1}{8} \quad \frac{31}{32}$ 【解析】由题设 $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 =$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } 2 \sin$$

$$\alpha \cos \alpha + 1 = \frac{3}{4}, \text{ 则 } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{8},$$

$$\text{由 } \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{31}{32}.$$

10. 【解】(1) 方法一: $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, 因

$$\text{为 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } (\sin \alpha +$$

$$\cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 即 } 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\text{从而 } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{2},$$

因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha > 0$, 又因为 $\sin \alpha \cos \alpha < 0$, 所以 $\cos \alpha < 0$, 因此 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$,

$$\text{则 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 故 } f(\alpha) =$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

方法二: 由 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 及 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

$$\text{解得 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ 或}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{因为 } 0 < \alpha < \pi, \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 因此 } f(\alpha) =$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 方法一: 因为 $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$

$$\frac{1}{3}, \text{ 所以 } 2 \sin \alpha = -4 \cos \alpha,$$

假设 $\cos \alpha = 0$, 则由上式知 $\sin \alpha = 0$, 与 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 矛盾, 所以 $\cos \alpha \neq 0$, 则



$$\tan \alpha = -2.$$

$$\text{则 } \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$$

$$\frac{\tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = 2.$$

$$\text{方法二: 因为 } f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{3}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \sin \alpha = -2 \cos \alpha,$$

$$\text{又 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ 所以 } 5 \cos^2 \alpha = 1, \text{ 即}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5},$$

$$\text{因此 } \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \cos^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha = 10 \cos^2 \alpha = 2.$$

$$11. D \quad \text{【解析】} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{4}{5}. \text{ 故选 D.}$$

$$12. \frac{2}{3} \quad \text{【解析】原式}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 - \cos^4 \alpha) + \sin^2 \alpha (1 - \sin^4 \alpha)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) (1 + \sin^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2}{1 + \cos^2 \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \frac{2}{3}.$$

$$13. \text{【证明】左边} = \sin \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) + \cos \alpha \cdot$$

$$\left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} =$$

右边.

即原等式成立.

$$14. C \quad \text{【解析】由 } \sin A + 3 \cos A = -\sqrt{2}, \text{ 可得}$$

$$\sin A = -\sqrt{2} - 3 \cos A, \text{ 所以 } (-\sqrt{2} - 3 \cos A)^2 + \cos^2 A = 1, \text{ 整理可得 } 10 \cos^2 A + 6$$

$$\sqrt{2} \cos A + 1 = 0, \text{ 解得 } \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{10} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 A 是 $\triangle ABC$ 的内角, 所以 $\sin A > 0$.

$$\text{当 } \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{10} \text{ 时, } \sin A = -\sqrt{2} - 3 \times$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{10} \right) = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \text{ (舍去);}$$



当 $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\sin A = -\sqrt{2} - 3 \times$

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -1$. 故

选 C.

易错警示

本题中需注意, A 为三角形的内角, 所以 $\sin A > 0$, 注意题目中的隐含条件.

15. D 【解析】过点 O 作 $OD \perp AB$ (图略), 则 $\angle AOD = \angle BOD = \alpha$,

根据题意可设半径长 $OB = r > 0$, 可

$$\text{得 } \cos \alpha = \frac{r-1}{r}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{r},$$

由同角三角函数的基本关系可得 $\cos^2 \alpha +$

$$\sin^2 \alpha = \left(\frac{r-1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{r}\right)^2 = 1, \text{ 解得 } r = 2,$$

$$\text{即可得 } \cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \alpha =$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \tan \alpha = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} +$$

$$\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 D.}$$

16. 【解】 (1) 因为 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, 所以

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}, \text{ 即 } 1 +$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}, \text{ 所以 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}. \text{ 由}$$

θ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角, 得 $0 < \theta < \pi$, 则

$\sin \theta > 0$, 而 $\sin \theta \cos \theta < 0$, 则 $\cos \theta < 0$, 则有

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 是钝角三角形.}$$

(2) 由 (1) 知, $\sin \theta > 0 > \cos \theta$,

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}, \text{ 所以 } \sin \theta - \cos \theta =$$

$$\sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} =$$

$$\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta} =$$

$$\sqrt{1 - 2 \times \left(-\frac{12}{25}\right)} = \frac{7}{5}.$$



对点上分

1. AC



思路导引

根据题意得 α 是第二象限角或第三象限角, 由 $\sin^2 \alpha +$

$$\cos^2 \alpha = 1 \text{ 得 } \sin^2 \alpha = \frac{225}{289}, \text{ 再分象限讨}$$

论求解即可.



【解析】 $\cos \alpha = -\frac{8}{17} < 0$, 故 α 是第二象限角

或第三象限角,

因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $\sin^2 \alpha = 1 -$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{225}{289},$$

所以当 α 是第二象限角时, $\sin \alpha =$

$$\sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{15}{8};$$

当 α 是第三象限角时, $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{225}{289}} =$

$$-\frac{15}{17}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{15}{8}.$$

提示: 注意讨论所在象限

2. A 【解析】因为 α 为第一象限角, 由同角三角函数的基本关系可

$$\text{得} \begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \\ \sin \alpha > 0, \\ \cos \alpha > 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

3. D 【解析】因为 $\tan \alpha = 2$, 所以

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha} = \frac{5}{4 - 6} = -\frac{5}{2}.$$

提示: “1”的妙用

故选 D.

4. A 【解析】由 $\frac{\cos \alpha + 2 \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + 2 \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = -$

1, 解得 $\tan \alpha = -2$, 所以 $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha =$

$$\frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4 - 3}{4 + 1} = \frac{1}{5}, \text{故}$$

选 A.

5. C 【解析】由 $\sin \theta = 2 \cos \theta$, 得 $\tan \theta = 2$, 所

以 $\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) =$

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta - \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{4 - 2}{4 + 1} =$$

$\frac{2}{5}$. 故选 C.

5.2 节测上分

1. D 【解析】已知角 θ 的终边经过点 $P(2,$

$a)$, 若 $\theta = \frac{5\pi}{3}$, 则 $\tan \theta = -\sqrt{3} = \frac{a}{2}$, 解得

$a = -2\sqrt{3}$. 故选 D.

2. B 【解析】因为 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\cos \theta < 0$,

$\tan \theta > 0$, 所以点 $M(\cos \theta, \tan \theta)$ 位于第二



象限.

3. C 【解析】因为 $\frac{1+\sin \alpha-\cos \alpha}{1+\sin \alpha+\cos \alpha}=2$, 所以

$$1+\sin \alpha-\cos \alpha=2(1+\sin \alpha+\cos \alpha),$$

所以 $\sin \alpha=-1-3 \cos \alpha$, 等号两边分别平方得 $\sin ^2 \alpha=(1+3 \cos \alpha)^2$, 化简得 $1-\cos ^2 \alpha=9 \cos ^2 \alpha+6 \cos \alpha+1$, 计算得 $(5 \cos \alpha+3) \times 2 \cos \alpha=0$, 所以 $\cos \alpha=0$ 或 $\cos \alpha=-\frac{3}{5}$,

又因为 α 为钝角, 所以 $\cos \alpha=-\frac{3}{5}$.

故选 C.

4. C 【解析】设大正方形的边长为 a , 则直角三角形的直角边长分别为 $a \sin \alpha$, $a \cos \alpha$, $\because \alpha$ 为直角三角形较小的锐角,

$$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{4}, S_1=a^2, S_2=S_1-4 \times$$

$$\frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot a \cos \alpha=a^2-2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha, \text { 则 }$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{a^2-2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha}=\frac{1}{1-2 \sin \alpha \cos \alpha}=25,$$

$$\text { 即 } \frac{\sin ^2 \alpha+\cos ^2 \alpha}{\sin ^2 \alpha+\cos ^2 \alpha-2 \sin \alpha \cos \alpha}=25,$$

$$\therefore \frac{\tan ^2 \alpha+1}{\tan ^2 \alpha+1-2 \tan \alpha}=25, \text { 解得 } \tan \alpha=\frac{3}{4} \text { 或 }$$

$$\tan \alpha=\frac{4}{3}(\text { 不合题意, 舍去),$$

$$\therefore \frac{3 \sin \alpha+\cos \alpha}{2 \sin \alpha-\cos \alpha}=\frac{3 \tan \alpha+1}{2 \tan \alpha-1}=\frac{3 \times \frac{3}{4}+1}{2 \times \frac{3}{4}-1}=\frac{13}{2}.$$

故选 C.

5. B 【解析】因为 $\theta \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos \theta \in$

$$(0,1), \sin \theta \in(0,1),$$

$$\text { 因为 } 2 k \sin ^2 \theta \cos ^2 \theta=\sin ^2 \theta+9 \cos ^2 \theta,$$

$$\text { 所以 } k=\frac{\sin ^2 \theta+9 \cos ^2 \theta}{2 \sin ^2 \theta \cos ^2 \theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos ^2 \theta}+\frac{9}{\sin ^2 \theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos ^2 \theta+\sin ^2 \theta\right)\left(\frac{1}{\cos ^2 \theta}+\frac{9}{\sin ^2 \theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(10+\frac{\sin ^2 \theta}{\cos ^2 \theta}+\frac{9 \cos ^2 \theta}{\sin ^2 \theta}\right) \geqslant \frac{1}{2} \times\left(10+\right.$$

$$\left.2 \sqrt{9}\right)=8, \text { 当且仅当 } \frac{\sin ^2 \theta}{\cos ^2 \theta}=\frac{9 \cos ^2 \theta}{\sin ^2 \theta}, \text { 即 } \theta=\frac{\pi}{3}$$

时, 等号成立, 所以 k 的最小值是 8. 故选 B.

6. ABC 【解析】对 A: 因为 $\sin \theta+\cos \theta=\frac{7}{17}$,

$$\text { 则 }(\sin \theta+\cos \theta)^2=1+2 \sin \theta \cos \theta=\frac{49}{289}, \text { 所 }$$

$$\text { 以 } 2 \sin \theta \cos \theta=-\frac{240}{289}, \text { 又因为 } \theta \in(0, \pi),$$



则 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$, 所以 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以以 θ 为内角的三角形为钝角三角形, 故 **A 正确**;

对 D: 可得 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{529}{289}$, 且 $\sin \theta - \cos \theta > 0$, 所以 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}$, 故 **D 错误**;

对 B: 联立
$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \end{cases}$$
 可得 $\sin \theta =$

$\frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}$, 故 **B 正确**;

对 C: 易知 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{15}{8}$, 故 **C 正确**.

故选 **ABC**.

7. $-\sin \alpha$ 【解析】

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha - 2025\pi) \cos\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos(2024\pi - \alpha) \tan(\pi + \alpha)} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \pi) \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos(-\alpha) \tan \alpha} \\ &= \frac{-\sin \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \tan \alpha} = \frac{-\sin \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = -\sin \alpha. \end{aligned}$$

8. 1 【解析】因为 $\tan \alpha = 2$,

$$\begin{aligned} & \text{所以 } 4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha \\ &= \frac{4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{4\tan^2 \alpha - 3\tan \alpha - 5}{\tan^2 \alpha + 1} \\ &= \frac{4 \times 2^2 - 3 \times 2 - 5}{2^2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

一题多解 因为 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\sin \alpha =$

$2\cos \alpha$, 且 $\cos \alpha \neq 0$,

所以 $4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha$

$$\begin{aligned} &= \frac{4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{16\cos^2 \alpha - 6\cos^2 \alpha - 5\cos^2 \alpha}{4\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{16 - 6 - 5}{5} = 1. \end{aligned}$$

9. $\frac{41}{50}$ 【解析】 $\because \frac{1+\tan \theta}{1-\tan \theta} = \frac{1}{2}, \therefore \tan \theta =$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}, \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \\ & -\frac{1}{3} \\ & \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{10}{9}} = -\frac{3}{10}, \end{aligned}$$



$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{9}{100} = \frac{41}{50}.$$

10. 【解】(1) 因为 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 是方程的两

$$\text{个根, 所以} \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{m}{4}, \\ 4(\sqrt{3}+1)^2 - 16m > 0, \end{cases}$$

$$\text{原式} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\text{所以 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2, \text{ 所以 } 1 + 2 \times \frac{m}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2, \text{ 解得 } m = \sqrt{3}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 可知, } m = \sqrt{3}, \text{ 所以方程为 } 4x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = 0, \text{ 解得 } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以} \begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{2}, \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{又因为 } \theta \in (-2\pi, 0), \text{ 所以 } \theta = -\frac{5\pi}{3} \text{ 或 } \theta = -\frac{11\pi}{6}.$$

5.3 诱导公式



基础上分

1. D 【解析】 $\cos 330^\circ + \tan 600^\circ$

$$\begin{aligned} &= \cos(360^\circ - 30^\circ) + \tan(360^\circ + 180^\circ + 60^\circ) \\ &= \cos(-30^\circ) + \tan(180^\circ + 60^\circ) \\ &= \cos 30^\circ + \tan 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 故选 D.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. A \quad \text{【解析】} &\sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} \cdot \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \\ &\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\tan \frac{\pi}{3}\right) = \\ &\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

提示: “负角化正角, 大角化小角”, 最终化为锐角求解

$$\begin{aligned} 3. -\frac{2\sqrt{3}+1}{4} \quad \text{【解析】原式} &= -\sin 1200^\circ \cdot \\ &\tan 585^\circ - \cos 300^\circ \sin 750^\circ \\ &= -\sin(3 \times 360^\circ + 120^\circ) \tan(2 \times 360^\circ - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& 135^\circ) - \cos(360^\circ - 60^\circ) \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) \\
& = -\sin 120^\circ \tan(-135^\circ) - \cos(-60^\circ) \cdot \sin 30^\circ \\
& = \sin(90^\circ + 30^\circ) \tan 135^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ \\
& = \cos 30^\circ \tan(180^\circ - 45^\circ) - \cos 60^\circ \sin 30^\circ \\
& = -\cos 30^\circ \tan 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{2\sqrt{3}+1}{4}.
\end{aligned}$$

4. A 【解析】因为角 α 的终边过点 $P(1, -\sqrt{2})$, 所以 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所

以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

5. B 【解析】 $\because \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2}{3},$
 $\therefore \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = -\frac{2}{3}$. 故选 B.

6. B 【解析】由诱导公式得 $\tan(3\pi + \alpha) = \tan \alpha$, 所以 $\tan \alpha = a$.

$$\begin{aligned}
& \text{所以 } \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \\
& = \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - 2a}{1 + a^2}.
\end{aligned}$$

7. B 【解析】 $\tan(\pi + 1) = \tan 1$, 故 A 错误;

$$\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\tan \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \cos \alpha, \text{ 故 B}$$

正确;

$$\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(\pi - \alpha) \tan(-\pi - \alpha)}{\sin(2\pi - \alpha)} \\
& = \frac{(-\cos \alpha)(-\tan \alpha)}{-\sin \alpha} \\
& = -\frac{\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} = -1, \text{ 故 D 错误.}
\end{aligned}$$

8. B 【解析】当 k 为偶数时, 设 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$, 则原式

$$\begin{aligned}
& = \frac{\sin[(2n+1)\pi + \theta] \cdot \cos[(2n+1)\pi - \theta]}{\sin(2n\pi - \theta) \cdot \cos(2n\pi + \theta)} \\
& = \frac{\sin(\pi + \theta) \cdot \cos(\pi - \theta)}{-\sin \theta \cdot \cos \theta} \\
& = \frac{-\sin \theta \cdot (-\cos \theta)}{-\sin \theta \cdot \cos \theta} = -1.
\end{aligned}$$

当 k 为奇数时, 设 $k = 2n+1, n \in \mathbf{Z}$, 则原式

$$\begin{aligned}
& = \frac{\sin[(2n+2)\pi + \theta] \cdot \cos[(2n+2)\pi - \theta]}{\sin[(2n+1)\pi - \theta] \cdot \cos[(2n+1)\pi + \theta]} \\
& = \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta \cdot (-\cos \theta)} = -1.
\end{aligned}$$



综上,原式的值为-1. 故选 B.

易错警示 忽略对 $k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 中系数 k 的分类讨论

不能对整数 k 进行“奇数与偶数”的分类讨论,或者讨论后不能正确地利用诱导公式是出现错误的主要原因.

9. ABC 【解析】 $\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$, 故 A 正确;

$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$, 故 B 正确;

$\sin(2A+2B) + \sin 2C = \sin[2(A+B)] + \sin 2C = \sin[2(\pi-C)] + \sin 2C = \sin(2\pi-2C) + \sin 2C = -\sin 2C + \sin 2C = 0$, 故 C 正确;
 $\cos(2A+2B) + \cos 2C = \cos[2(A+B)] + \cos 2C = \cos[2(\pi-C)] + \cos 2C = \cos(2\pi-2C) + \cos 2C = \cos 2C + \cos 2C = 2\cos 2C$, 故 D 错误.

10. $\frac{11}{9}$ 【解析】令 $t = x + \frac{\pi}{3}$, 则 $x = t - \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} \sin t = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) &= \\ \sin(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t + \cos^2 t = \frac{1}{3} + \\ \left(1 - \frac{1}{9}\right) &= \frac{11}{9}. \end{aligned}$$

11. 【解】(1) $f(\alpha)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) \sin\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos(-\alpha - \pi) \cos\left(-\alpha + \frac{7\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{(-\cos \alpha) \cdot (-\sin \alpha)} = -\cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\text{即 } f(\alpha) = -\cos \alpha \left(\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z} \right).$$

$$(2) \text{ 因为 } \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}, \text{ 所以 } -\sin \alpha = \frac{1}{5}, \text{ 即 } \sin \alpha = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{又因为 } \alpha \text{ 是第三象限角, 所以 } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \text{ 所以}$$

$$f(\alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$(3) \text{ 由 } f(A) = \frac{3}{5}, \text{ 得 } -\cos A = \frac{3}{5}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \cos A = -\frac{3}{5}, \text{ 所以角 } A \text{ 是钝角, } \sin A =$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -\frac{4}{3}, \text{ 所以}$$

$$\tan A - \sin A = -\frac{4}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{32}{15}.$$



对点上分

1. A 【解析】因为 $\tan(-80^\circ) = -\tan 80^\circ = k$,
即 $\tan 80^\circ = -k$, 所以 $\tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ = k$.

2. B 【解析】因为 $\sin(\theta + \pi) < 0$, 所以 $-\sin \theta < 0$, 即 $\sin \theta > 0$; 又因为 $\cos(\theta - \pi) > 0$, 所以 $-\cos \theta > 0$, 即 $\cos \theta < 0$. 故选 B.

3. B 【解析】因为 $f(\alpha) =$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(-\pi - \alpha) \tan(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{-\cos \alpha \cdot (-\tan \alpha)} = \cos \alpha,$$

$$\text{所以 } f\left(-\frac{2024\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2024\pi}{3}\right) = \cos \frac{2024\pi}{3} = \cos\left(675\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

4. B 【解析】因为 $\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 B.}$$

5. -3 【解析】由 $\tan \alpha = 2$, 得

$$\frac{\sin(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = -\frac{2+1}{2-1} = -3.$$

6. 6 【解析】由题意, $f(x) = a \cdot$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + b \tan x + 8 = -a \sin x + b \tan x + 8,$$

$$f(-2) = 10 = -a \sin(-2) + b \tan(-2) + 8 = a \sin 2 - b \tan 2 - 8 + 16 = -(-a \sin 2 + b \tan 2 + 8) + 16 = -f(2) + 16, \text{ 解得 } f(2) = 6.$$

7. 【证明】(1) 左边 =

$$\begin{aligned} & \frac{\tan(-\alpha) \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)}{\sin\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \cos\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]} \\ &= \frac{(-\tan \alpha)(-\sin \alpha) \cos \alpha}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{-\cos \alpha \sin \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha = \text{右边, 所以原等式成立.} \end{aligned}$$

(2) 左边 =



$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \left[\pi + \left(\frac{8\pi}{7} + \alpha \right) \right] + 3\cos \left[\left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) - 3\pi \right]}{\sin \left[4\pi - \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) \right] - \cos \left[2\pi + \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) \right]} \\
 &= \frac{-\sin \left(\frac{8\pi}{7} + \alpha \right) - 3\cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right)}{-\sin \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right)} \\
 &= \frac{\tan \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) + 3}{\tan \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) + 1} = \frac{m+3}{m+1} = \text{右边},
 \end{aligned}$$

所以原等式成立.

一题多解

(2) 由 $\tan \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) = m$,

得 $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) = m$, 所以左边 =

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \left[2\pi + \left(\frac{\pi}{7} + \alpha \right) \right] + 3\cos \left[\left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) - 2\pi \right]}{\sin \left[2\pi + \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) \right] - \cos \left[2\pi + \pi + \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) \right]} \\
 &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{7} + \alpha \right) + 3\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right)}{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right)} \\
 &= \frac{\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) + 3}{\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) + 1} = \frac{m+3}{m+1} = \text{右边}, \text{等式}
 \end{aligned}$$

成立.


8. 【解】(1) α 的终边过点 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$, $\sin \alpha =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}, f(\alpha) = \frac{\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5} \right)}{\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5} \right)} = \\
 & -\frac{1}{7}.
 \end{aligned}$$

$$(2) m = \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \cos (2\pi - \theta) \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)} = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \cos \theta \cdot \\
 & (-\sin \theta)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \cos \theta (-\sin \theta) = -1,$$

 **提示:** 先利用诱导公式化简, 再代入求值, 化简时要注意角的范围对符号的影响

$$\text{所以 } f \left[\left(m - \frac{1}{6} \right) \pi \right] = f \left(-\frac{7}{6} \pi \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \left(-2\pi + \frac{5}{6} \pi \right) + \cos \left(-2\pi + \frac{5}{6} \pi \right)}{\sin \left(-2\pi + \frac{5}{6} \pi \right) - \cos \left(-2\pi + \frac{5}{6} \pi \right)} = \\
 & \frac{\sin \frac{5}{6} \pi + \cos \frac{5}{6} \pi}{\sin \frac{5}{6} \pi - \cos \frac{5}{6} \pi} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} - 2.
 \end{aligned}$$



(3) 因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 即 } 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\text{从而 } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{2},$$

因为 $0 < \alpha < \pi$, $\sin \alpha > 0$, $\sin \alpha \cos \alpha < 0$, 所以 $\cos \alpha < 0$, 因此 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$,

$$\text{从而 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 故 } f(\alpha) =$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5.4 三角函数的图象与性质

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象



基础上分

1. A 【解析】A 中当 $x = \pi$ 时, $y = 4$, 故 $(\pi, -1)$ 不是关键点, B, C, D 都是.

2. B 【解析】分别令 $3x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$,

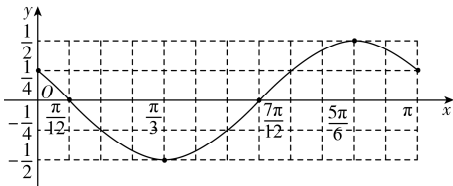
解得 $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$, 即五个点的横

坐标分别为 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$.

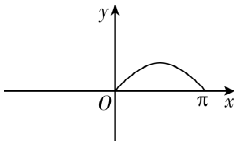
3. 【解】令 $2x + \frac{\pi}{3}$ 分别等于 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 得到下表.

$2x + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

描出对应的点, 用光滑的曲线依次连接各点, 得到 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图象.



4. A 【解析】函数 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的图象如图所示,



将该图象沿 y 轴对称, 即得 $y = \sin |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象, 故选 A.

**快解**

因为当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $y =$

$$\sin \left| \pm \frac{\pi}{2} \right| = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \text{ 所以排除 B, C, D.}$$

5. D 【解析】函数 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} \right) \cos x$ 的

定义域为 \mathbf{R} , 由 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{e^x + e^{-x}}$

$$\cos(-x) = -\frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} \cdot \cos x = -f(x), \text{ 可得函}$$

数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 图象关于原点对

称, 排除 A, C; 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 令 $f(x) = 0$,

解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) > 0$,

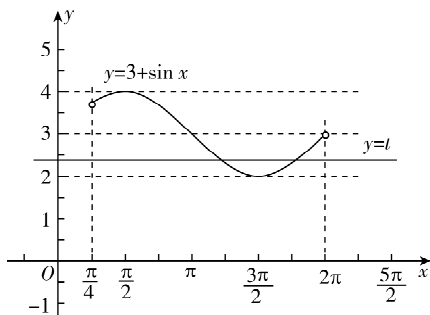
故 B 不满足题意. 故选 D.

6. A 【解析】在同一直角坐标系中, 作出 $y =$

$3 + \sin x, x \in \left(\frac{\pi}{4}, 2\pi \right)$ 与 $y = t$ 的图象, 由图

象可知两图象的交点个数可能为 0, 1, 2,

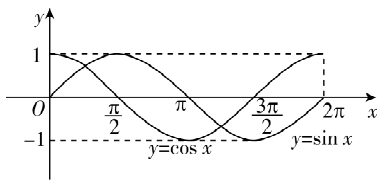
故选 A.



7. AC 【解析】在同一平面直角坐标系中画

出 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图

象, 如图:



在 $[0, 2\pi]$ 内, 当 $\cos x = \sin x$ 时, $x = \frac{\pi}{4}$ 或

$x = \frac{5\pi}{4}$, 结合图象可知满足 $\cos x > \sin x$ 的 x

的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4} \right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right]$. 故

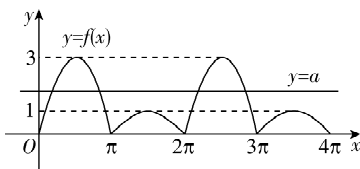
选 AC.

8. $\{a | 1 < a < 3\}$ 【解析】由条件可知,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & x \in [0, \pi) \cup [2\pi, 3\pi), \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi) \cup [3\pi, 4\pi], \end{cases}$$



在同一坐标系内作出函数 $y=a$ 和 $y=f(x)$ 的图象, 如图所示:



要使方程 $f(x)=a$ 有 4 个根, 则函数 $y=a$ 和 $y=f(x)$ 的图象有 4 个交点, 由图象可知 $1 < a < 3$.



对点上分

1. A 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $0 < A < \pi$, 一方面,

若 $\sin A > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 结合正弦函数图象(图略)得

$\frac{\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $A > \frac{\pi}{4}$; 另一方面, 若 $A >$

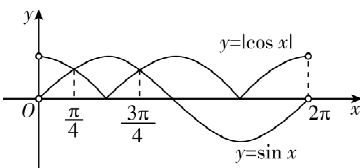
$\frac{\pi}{4}$, 取 $A = \frac{5\pi}{6}$, 则 $\sin A = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以

“ $\sin A > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”是“ $A > \frac{\pi}{4}$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

2. A 【解析】作出函数 $y = \sin x$ 以及 $y =$

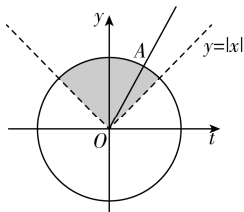
$|\cos x|$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的图象如图所示, 由图

可知 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. 故选 A.



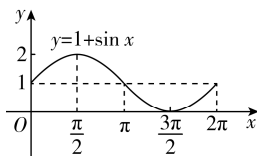
一题多解

(单位圆法) 在平面直角坐标系 Oxy 中, 以横轴的非负半轴为始边作出大小为 x ($x \in (0, 2\pi)$) 的角, 其终边与单位圆交于点 $A(t_A, y_A)$, 如图所示. 于是 $\sin x = y_A$, $|\cos x| = |t_A|$, 原不等式转化为 $y_A > |t_A|$. 在同一坐标系中画出函数 $y = |t|$ 的图象, 则角的终边的范围对应图中的阴影区域, 故 x 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.





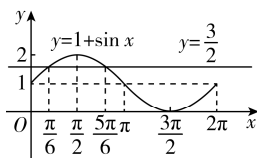
3. 【解】(1) 用“五点法”画出函数 $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象, 如图①所示.



图①

由图象可知, 当 $y > 1$ 时, $x \in (0, \pi)$; 当 $y < 1$ 时, $x \in (\pi, 2\pi)$.

(2) 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = 1 + \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的图象和直线 $y = \frac{3}{2}$, 如图②所示.

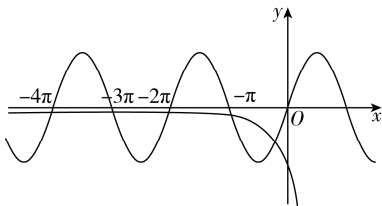


图②

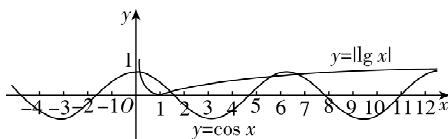
由图可知直线 $y = \frac{3}{2}$ 与函数 $y = 1 + \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的图象有两个交点, 交点横坐标分别为 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$,

则不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$.

4. AC 【解析】令 $f(x) = \sin x + e^x = 0$, 则 $\sin x = -e^x$, 作出函数 $y = \sin x$ 与函数 $y = -e^x$ 的大致图象如图所示, 由图可知函数在区间 $(-\pi, 0)$ 和 $(-3\pi, -2\pi)$ 上存在零点. 故选 AC.



5. C 【解析】画出 $y = \cos x$ 与 $y = |\lg x|$ 的图象如图所示:



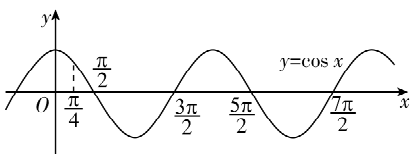
根据图象可知, 交点个数是 4, 故选 C.

6. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ 【解析】由正弦函数的图象知当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\sin x \in [-1, 1]$, 要使得方程 $\sin x = 4m + 1$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上有解, 则 $-1 \leq 4m + 1 \leq 1$, 故 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

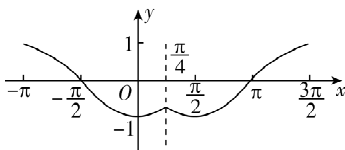
7. $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right]$ 【解析】为使函数 $f(x)$ 在



$\left[\frac{\pi}{4}, a\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ 上有且仅有三个零点, 根据余弦函数的图象可得 $\frac{5}{2}\pi < a\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{2}\pi$, 解得 $a \in \left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right]$, 故 a 的取值范围是 $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right]$.



8. 【解】(1) $y=f(x)$ 的图象如图所示.



(2) 任取 $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{\pi}{2} - x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 因为函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称, 所以 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

又当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) = -\sin x$, 所以 $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$, $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right)$.

所以 $f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$.

(3) 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $-\frac{9}{10} \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以结合图象可知 $f(x) = -\frac{9}{10}$ 有 4 个解, 分别设为

m_1, m_2, m_3, m_4 , 且 4 个解满足 $m_1 < m_2 < \frac{\pi}{4} < m_3 < m_4$, $m_1 + m_2 = 0$, $m_3 + m_4 = \pi$, 所以

$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = \pi$.

5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质

课时 1 正弦函数、余弦函数的性质(1)



基础上分

1. B 【解析】由题意得 $2\sin x - 1 \geq 0$, 即 $\sin x \geq \frac{1}{2}$, 结合正弦曲线(图略)可得



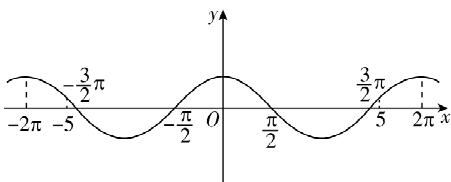
$f(x)$ 的定义域为 $\left\{ x \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 故选 B.

2. $\left[-5, -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 5\right]$

【解析】由题意得 x 满足不等式组

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ 25 - x^2 \geq 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \cos x > 0, \\ -5 \leq x \leq 5, \end{cases} \text{ 作出 } y = \cos x \text{ 的}$$

部分图象, 如图所示.



结合图象可得 $x \in \left[-5, -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 5\right]$.

3. D 【解析】函数的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} =$

4π . 故选 D.

4. BC 【解析】对于 A, 令 $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \sin \frac{\pi}{3} =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 令 } x = \frac{4\pi}{3}, y = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } y =$$

$\sin |x|$ 的最小正周期不是 π , 故 A 错误;

对于 B, $y = \sin x$ 的最小正周期为 2π , 所以

$y = |\sin x| + 1$ 的最小正周期为 π , 故 B

正确;

对于 C, $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \text{ 的最小正周期为 } \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故}$$

C 正确;

对于 D, $y = \sin x$ 的最小正周期为 2π , 而

$y = \sin x + 1$ 的图象是由 $y = \sin x$ 的图象向

上平移 1 个单位长度得到的, 则 $y = \sin x + 1$

的最小正周期为 2π , 故 D 错误.

5. D 【解析】当 $a = c = 0, b \neq 0$ 时, 函数

$$f(x) = b \sin 2x, \text{ 最小正周期为 } \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 A}$$

可能.

当 $b = c = 0, a \neq 0$ 时, 函数 $f(x) = a \sin x$, 最

小正周期为 2π , 故 B 可能.

当 $a = b = 0, c \neq 0$ 时, 函数 $f(x) = c \sin 4x$, 最

$$\text{小正周期为 } \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 C 可能.}$$

对于 D, $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{3} + b \sin \frac{2\pi}{3}$



$$+c\sin \frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$a\sin \frac{2\pi}{3} + b\sin \frac{4\pi}{3} + c\sin \frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}c, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a,$$

$$\text{则当 } T = \frac{\pi}{3} \text{ 时, 由 } f(0) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\text{得 } a=0, b=c, \text{ 又 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } a =$$

$0, b=0, c=0$, 与 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ 矛盾, 故 D 不可能.

6. ±2 【解析】因为函数 $f(x) = 3\cos\left(ax - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π , 所以 $\frac{2\pi}{|a|} = \pi$, 解得 $a = \pm 2$.

易错警示 思维定式导致忽视变量取值范围致错

三角函数问题中, 自变量 x 的系数常常被限定为正数, 但这并不是一定的, 如本题中没有指明 $a > 0$, 求解后 a 有两个值.

7. 0 【解析】由题意可知, 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}$

$$x \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

$$\text{又 } f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, f(2) = \sin \pi = 0, f(3) =$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, f(4) = \sin 2\pi = 0, \text{ 所以 } f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0.$$

$$\text{又 } 2\,023 = 4 \times 505 + 3, \text{ 所以 } f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2\,022) + f(2\,023) = f(1) + f(2) + f(3) = 0.$$

8. C 【解析】由正弦函数图象的对称性可

$$\text{令 } \sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \text{ 则 } a + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即}$$

$$a = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 当 } k = 0 \text{ 时, 符合条件}$$

$$\text{的一个 } a = -\frac{\pi}{6}. \text{ 故选 C.}$$

9. C 【解析】由 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且为偶

$$\text{函数, 得 } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{即 } -\cos(-\pi + \varphi) = \cos(\pi + \varphi),$$

$$\text{可得 } \cos \varphi = -\cos \varphi, \text{ 即 } \cos \varphi = 0.$$

$$\text{因为 } \varphi \in [0, \pi], \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{当 } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) = -\sin x \sin 2x \text{ 为偶函数,}$$



满足题意. 故选 C.

一题多解

因为 $f(x)$ 是偶函数, $y = \sin x$ 是奇函数, 所以 $y = \cos(2x + \varphi)$ 是奇函数, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 因为 $\varphi \in [0, \pi]$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 故选 C.

10. BD 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由图象可知 $\frac{T}{2} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \omega = 1$, 故 A 错误.

将 $(-\frac{\pi}{8}, 3)$ 代入解析式中可得,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 1, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} +$$

$$2m\pi, m \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbf{Z}, \text{ 所以}$$

$$\text{函数 } f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4} + 2m\pi\right) =$$

$$3\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right), m \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{令 } 2x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = -\frac{\pi}{8} +$$

$$\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 当 } k = -1 \text{ 时, } x = -\frac{5\pi}{8}, \text{ 故 B}$$

正确.

$$\text{令 } 2x + \frac{3\pi}{4} = n\pi, n \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},$$

$$n \in \mathbf{Z}, \text{ 令 } -\frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ 解得 } n = \frac{5}{4}, \text{ 不是}$$

整数, 故 C 错误.

$$\text{函数 } f\left(x + \frac{7\pi}{8}\right) = 3\sin\left(2x + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos 2x, \text{ 为偶函数, 故 D}$$

正确. 故选 BD.

11. B 【解析】由 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 可

得 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 的图象的

对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$

时, $x = \frac{\pi}{4\omega}$, 当 $k = 1$ 时, $x = \frac{5\pi}{4\omega}$, 当 $k = 2$ 时,

$$x = \frac{9\pi}{4\omega}.$$

$$\text{由题知 } \omega > 0, \text{ 则 } \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{4\omega} \leq \pi, \\ 0 \leq \frac{5\pi}{4\omega} \leq \pi, \\ \frac{9\pi}{4\omega} > \pi, \end{cases}$$

$$\text{可得 } \frac{5}{4} \leq \omega < \frac{9}{4}, \text{ 故选 B.}$$



课时 2 正弦函数、余弦函数的性质(2)



基础上分

1. D 【解析】对于 A, C, 最小正周期为 2π , 故错误;

对于 B, $y = |\sin x|$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象将 x 轴下方部分翻折到 x 轴上方, 原来在 x 轴上及 x 轴上方部分不变得到, 则周期为 π , 但在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故错误;

对于 D, $y = |\cos x|$ 的图象可由 $y = \cos x$ 的图象将 x 轴下方部分翻折到 x 轴上方, 原来在 x 轴上和 x 轴上方部分不变得到, 则周期为 π , 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故正确.

2. A 【解析】令 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$, 可得

$$2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ 当 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq$$

$$x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \text{ 时, 函数 } y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 单调递增. 所以当 } 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi +$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ 单调递增. 所以当 } 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi +$$

$$\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } 2k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{时, } f(x) \text{ 单调递增. 故 } f(x) \text{ 在 } \left[2k\pi - \frac{\pi}{3},\right.$$

$$\left.2k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z} \text{ 上单调递增. 故选 A.}$$

易错警示 忽略定义域

确定函数性质要树立定义域优先的意识.

3. C 【解析】函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$

$$(\omega > 0), \text{ 当 } x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 时, } \omega x + \frac{\pi}{6}$$

$$\in \left[-\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}\right].$$

而余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递

减, 又 $-\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{6}$, 因此

$$\left[-\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}\right] \subseteq [0, \pi], \text{ 解得 } 0 <$$

$$\omega \leq 1.$$

$$\text{由 } f(x) = 0, \text{ 得 } \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = -1, \text{ 当 } x \in [0,$$

$$\pi] \text{ 时, } \omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\omega + \frac{\pi}{6}\right].$$

而函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 1 个零

$$\text{点, 则 } \pi \leq \pi\omega + \frac{\pi}{6} < 3\pi, \text{ 解得 } \frac{5}{6} \leq \omega < \frac{17}{6},$$



因此 $\frac{5}{6} \leq \omega \leq 1$, 结合选项可知应选 C.

4. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 【解析】 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 要求 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的单调递增区间, 即求 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间.

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得

$\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $x \in$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 故函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的单调

递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$.

易错警示 求单调区间时忽略自变量系数正负的影响致错

本题中, 函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的内层函数中 x 的系数为负, 所以需要先将 x 的系数转化为正数, 即 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 要求 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的单调递增区间, 就是求 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间.

5. $\left(\frac{\pi}{6}, +\infty\right)$ 【解析】 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 故 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 由于 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in$

\mathbf{Z} , 解得 $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$,

故 $f(x)$ 的一个单调递增区间为

$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$. 由于区间 $[-a, a]$ 关于原点对称, 要使 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上不单调, 则

$a > \frac{\pi}{6}$, 所以实数 a 的取值范围

为 $\left(\frac{\pi}{6}, +\infty\right)$.

6. B 【解析】由题意得 $\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,



所以 $\cos \alpha = \cos(-\beta + 2k\pi) = \cos \beta$, 因为 $\beta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, 所以 $-1 \leq \cos \beta \leq \frac{1}{2}$, 则 $-1 \leq \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$, 所以当 $\beta = \frac{\pi}{3}$, 即 $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $\cos \alpha$ 取得最大值, 且最大值为 $\frac{1}{2}$.

7. B 【解析】 $f(x) = |\cos x| + \cos |x| =$

$$\begin{cases} 2\cos x, & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

所以函数 $f(x) = |\cos x| + \cos |x|$ 的值域为 $[0, 2]$. 故选 B.

8. A 【解析】 $f(x) = -1 + 2\cos^2 x + k(1 - \sin x) = -1 + 2(1 - \sin^2 x) + k(1 - \sin x) = -2\sin^2 x - k\sin x + 1 + k$, 设 $t = \sin x, t \in [-1, 1], y = -2t^2 - kt + 1 + k$, 函数 $y = -2t^2 - kt + 1 + k$ 的图象开口向下, 对称轴为直线 $t = -\frac{-k}{-4} = -\frac{k}{4} > 1$, 所以函数 $y = -2t^2 - kt + 1 + k$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $y_{\max} = -2 - k + 1 + k = -1$, 即 $f(x)$ 的最大值为 -1 . 故选 A.

9. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 【解析】当 $x = 0$ 时, $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, 由 $x \in [0, a]$, 可得 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 2a - \frac{\pi}{3}\right]$. 函数 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $[0, a]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$, 则根据正弦函数的图象知 $\frac{\pi}{2} \leq 2a - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, 解得 $\frac{5\pi}{12} \leq a \leq \frac{5\pi}{6}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

10. 【解】(1) 由题图可知 $A = 2$, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$,

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 解得 } \omega = 2, \therefore f(x) = 2\cos(2x + \varphi).$$

$$\text{又 } f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \varphi = 2k_1\pi +$$

$$\frac{\pi}{6}, k_1 \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } 0 < \varphi < \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) =$$

$$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$(2) \text{ 令 } 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z},$$



得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12} \right], k \in \mathbf{Z}$.

(3) 当 $x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4} \right]$ 时, $\frac{5\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{11\pi}{3}$,

则 $-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}, \therefore f(x) =$

$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2, 1]$, 即 $f(x)$ 在区

间 $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4} \right]$ 上的值域为 $[-2, 1]$.



对点上分

1. B



思路导引 本题要比较正、余弦值的大小, 题中余弦值比较多, 所以先利用诱导公式完成正弦向余弦的“异化同”, 再根据余弦函数的单调性比较大小.

【解析】 由题意得 $b = \sin(180^\circ - 46^\circ) = \sin 46^\circ = \sin(90^\circ - 44^\circ) = \cos 44^\circ, c = \cos 43^\circ$.

因为 $y = \cos x$ 在 $0^\circ < x < 90^\circ$ 时单调递减, 所以 $\cos 43^\circ > \cos 44^\circ > \cos 46^\circ$, 即 $c > b > a$. 故选 B.

2. A **【解析】** 因为 $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 π 是 $f(x)$ 的一个周期.

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上单调递减.

因为 $-1 < \sin \frac{7\pi}{6} < \sin \frac{10\pi}{9} < \sin \frac{19\pi}{18} < 0$, 且

$\sin \frac{7\pi}{6} = \cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{10\pi}{9} = \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$,

所以 $-1 < \cos \frac{2\pi}{3} < \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) < \sin \frac{19\pi}{18} < 0$. 故

$f\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) > f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) > f\left(\sin \frac{19\pi}{18}\right)$.

故选 A.

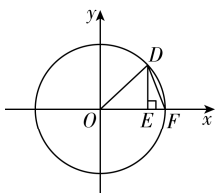
3. A **【解析】** 如图, 在单位圆中, 设 $\angle DOE = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin \alpha = \frac{DE}{DO} = DE < DF <$

$\widehat{DF} = \alpha \Rightarrow 0 < \sin \alpha < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 因为函数 $y = \cos x$

在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 所以 $\cos(\sin$



$\alpha) > \cos \alpha$. 又 $0 < \cos \alpha < 1 < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin(\cos \alpha) < \cos \alpha$, 从而 $\sin(\cos \alpha) < \cos \alpha < \cos(\sin \alpha)$, 即 $a < b < c$. 故选 A.



4. C 【解析】因为 $\omega > 0$, 所以当 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$,

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增, 所以 $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2}$ (T 为 $f(x)$ 的最小正周期), 则 $T \geq \pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} \geq \pi$ ($\omega >$

0), 解得 $0 < \omega \leq 2$, 又 $\begin{cases} -\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 故

$0 < \omega \leq 1$, 则 ω 的最大值为 1, 当 ω 取最大值 1 时, $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的值域为 $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right]$. 故选 C.

5. C 【解析】因为 $\omega > 0$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时, $-\frac{\pi}{6} <$

$$\omega x - \frac{\pi}{6} < \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值, 所

以 $\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega > 2$.

当 $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ 时, $\frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} < \omega x - \frac{\pi}{6} < \pi\omega - \frac{\pi}{6}$.

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 上单调, 所以

$$\left(\frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6}, \pi\omega - \frac{\pi}{6}\right) \subseteq \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbf{Z}),$$

所以 $\begin{cases} \frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} \geq k\pi - \frac{\pi}{2}, \\ \pi\omega - \frac{\pi}{6} \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{Z}$, 解得

$$\frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \leq \omega \leq k + \frac{2}{3} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } \frac{3}{2}k -$$



$$\frac{1}{2} \leq k + \frac{2}{3}, \text{解得 } k \leq \frac{7}{3}.$$

又因为 $\omega > 0$, 所以 $k \in \{0, 1, 2\}$.

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } 0 < \omega \leq \frac{2}{3};$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } 1 \leq \omega \leq \frac{5}{3};$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, } \frac{5}{2} \leq \omega \leq \frac{8}{3}.$$

又因为 $\omega > 2$, 所以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right]$. 故选 C.

6. AB 【解析】 $f(x) = \frac{\sin x}{3 - \cos^2 x}$, 则 $f(-x) =$

$$\frac{\sin(-x)}{3 - \cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{3 - \cos^2 x} = -f(x), \text{所以 } f(x)$$

为奇函数, 故 A 正确.

$$f(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{3 - \cos^2(x + \pi)} = -\frac{\sin x}{3 - \cos^2 x} =$$

$-f(x)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 π , 故 C 错误.

$$f(2\pi - x) = \frac{\sin(2\pi - x)}{3 - \cos^2(2\pi - x)} = -\frac{\sin x}{3 - \cos^2 x} =$$

$-f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \pi$ 对称, 故 D 错误.

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{2 + \sin^2 x}, \text{显然 } f(0) =$$

$f(\pi) = 0$, 且 $f(x) = f(x + 2\pi)$, 即 $f(x)$ 的一个周期为 2π .

$$\text{当 } x \in (0, \pi) \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{\sin x + \frac{2}{\sin x}}, \text{由 } 0 <$$

$$\sin x \leq 1, \text{设 } t = \sin x, t \in (0, 1], \text{且 } y = \frac{2}{t} +$$

$$t \text{ 在 } (0, 1] \text{ 上单调递减, 所以 } \frac{2}{t} + t \geq 3, \text{即}$$

$$\frac{2}{\sin x} + \sin x \geq 3, \text{所以 } f(x) = \frac{1}{\frac{2}{\sin x} + \sin x} \leq$$

$$\frac{1}{3}. \text{当 } x \in (\pi, 2\pi) \text{ 时, } f(x) < 0, \text{所以 } f(x)$$

的最大值为 $\frac{1}{3}$, 故 B 正确. 故选 AB.

7. AD 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

$$\text{由函数图象可知 } A = 2, \frac{T}{2} = \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$\frac{\pi}{2}, \text{所以 } T = \pi, \text{又 } \omega > 0, T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{所以 } \omega = 2,$$

故 A 正确;

$$f(x) = 2\sin(2x + \varphi), \text{由 } f\left(-\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = 2, \text{得 } \varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in$$

$$\mathbf{Z}, \text{解得 } \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{由于 } -\pi < \varphi < \pi,$$



所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$,

则 $f(1) = 2\sin\left(2 + \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$, 所以函数 $f(x)$ 的图象不关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 B 错误;

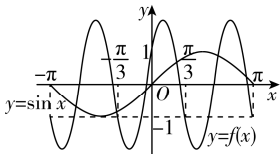
当 $1 < x < 2$ 时, $2 + \frac{2\pi}{3} < 2x + \frac{2\pi}{3} < 4 + \frac{2\pi}{3}$, 而 $\pi < 2 + \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} < 4 + \frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{2}$, 且 $y = 2\sin x$ 在 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上不单调, 故 C 错误;

$f(\lambda x) = 2\sin\left(2\lambda x + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\lambda > 0$, 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2\pi}{3} \leq 2\lambda x + \frac{2\pi}{3} \leq \lambda\pi + \frac{2\pi}{3}$,

若函数 $f(\lambda x)$ ($\lambda > 0$) 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有两个零点, 则 $2\pi \leq \lambda\pi + \frac{2\pi}{3} < 3\pi$, 解得 $\frac{4}{3} \leq \lambda < \frac{7}{3}$, 故 D 正确. 故选 AD.

8. AD 【解析】对于 A, 当 $\omega = 3$ 时, $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$, 将 $y = 2\sin 3x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度, 得 $y = 2\sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{18}\right)\right] = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$, 即 $y = f(x)$ 的图象, 故 A 正确;

对于 B, 当 $\omega = 3$ 时, $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$, 在同一坐标系中作出 $y = \sin x$ 与 $y = f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象, 由图可知曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的交点个数为 6, 故 B 错误;



对于 C, 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{6}\right]$, 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点, 则 $5\pi \leq 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} < 6\pi$, 解得 $\frac{29}{12} \leq \omega < \frac{35}{12}$, 故 C 错误;

对于 D, 当 $x \in \left(0, \frac{4\pi}{35}\right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{4\omega\pi}{35} + \frac{\pi}{6}\right)$, 由选项 C 可知 $\frac{29}{12} \leq \omega < \frac{35}{12}$, 则 $\frac{29\pi}{105} \leq \omega \cdot \frac{4\pi}{35} < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{29\pi}{105} + \frac{\pi}{6} \leq \omega \cdot \frac{4\pi}{35} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$ 在 $\left(0, \frac{4\pi}{35}\right)$ 上恒成立, 故 D 正确.



$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}, \omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{4\omega\pi}{35} + \frac{\pi}{6} \right) \subseteq \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right),$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{4\pi}{35}\right)$ 上单调递增, 故 D 正确. 故选 AD.

9.6 【解析】 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 函数 $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$, 其图象的一条对称轴为直线 $x = \frac{5\pi}{12}$, 于是 $(2k+1) \cdot \frac{T}{4} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{N}$, 解得 $T = \frac{\pi}{2k+1}$, $k \in \mathbf{N}$, 则 $\omega = 2(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$.

由 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调, 得 $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$, 即 $T \geq \frac{\pi}{6}$, 因此 $\frac{\pi}{2k+1} \geq \frac{\pi}{6}$, 解得 $k \leq \frac{5}{2}$, 而 $k \in \mathbf{N}$, 于是 $k \in \{0, 1, 2\}$.

当 $k=2$ 时, $\omega=10$, $f(x) = A\sin(10x+\varphi)$, 由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\varphi\right) = 0$, 得 $\frac{5}{3}\pi + \varphi = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, 而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $n=2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $f(x) = A\sin\left(10x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $10x + \frac{\pi}{3} \in \left(2\pi, \frac{17\pi}{6}\right)$, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上不单调, 不符合题意.

当 $k=1$ 时, $\omega=6$, $f(x) = A\sin(6x+\varphi)$, 由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\sin(\pi+\varphi) = 0$, 得 $\pi + \varphi = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, 而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $n=1$, $\varphi = 0$, $f(x) = A\sin 6x$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $6x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调, 符合题意.

当 $k=0$ 时, $\omega=2$, $f(x) = A\sin(2x+\varphi)$, 由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right) = 0$, 得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, 而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $n=0$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $f(x) = A\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调, 符合题意.

因此 $\omega=2$ 或 $\omega=6$, 所以 ω 的最大值为 6.

10. 【解】 (1) 由题意得 $f(\alpha) =$



$$\frac{\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan(-\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha \cdot (-\sin\alpha)}{\sin\alpha \cdot \tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \cos\alpha \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right).$$

(2) 由三角函数定义可得 $\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+3}} = \frac{1}{2}$, 解得 $m=1$.

(3) 由(1)知 $f(x) = \cos x$ $\left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right)$, 则 $g(x) = 2[f(x)]^2 + f\left(-\frac{\pi}{2}+x\right) + 2 = 2\cos^2 x + \cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right) + 2 = 2(1-\sin^2 x) + \sin x + 2 = -2\sin^2 x + \sin x + 4 = -2\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{33}{8} \left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right)$.

所以当 $\sin x = \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 取到最大值, $g(x)_{\max} = \frac{33}{8}$.

11. 【解】(1) 由题意可知最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 则 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$),

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(2) (i) $g(x) = a\cos^2 x - 2\sin x - \frac{a}{4} = a(1 - \sin^2 x) - 2\sin x - \frac{a}{4} = -a\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3a}{4}$.

令 $t = \sin x$, $t \in [-1, 1]$, $h(t) = -at^2 - 2t + \frac{3a}{4}$.

抛物线 $h(t)$ 的对称轴方程为 $t = -\frac{-2}{-2a} = -\frac{1}{a}$.

当 $a \in (-\infty, -1)$, 即 $-\frac{1}{a} \in (0, 1)$ 时, 函数 $h(t)$ 的最小值为 $h\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} = -\frac{13}{4}$, 解得 $a = -4$ 或 $a = -\frac{1}{3}$ (舍去);



当 $a \in [-1, 0)$, 即 $-\frac{1}{a} \in [1, +\infty)$ 时, 函数 $h(t)$ 的最小值为 $h(1) = -\frac{a}{4} - 2 = -\frac{13}{4}$, 解得 $a = 5$ (舍去). 综上, $a = -4$.

(ii) 由 (i) 可知 $a = -4$, 函数 $g(x) = 4\sin^2 x - 2\sin x - 3$, 由 $x_1 \in \mathbf{R}$, 可得 $g(x_1) \in \left[-\frac{13}{4}, 3\right]$,

因为 $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, 所以 $2x_2 + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $f(x_2) \in [-1, 1]$.

当 $m > 0$ 时, $mf(x_2) + 2 \in [-m+2, m+2]$, $\left[-\frac{13}{4}, 3\right] \subseteq [-m+2, m+2]$, 即

$$\begin{cases} -m+2 \leq -\frac{13}{4}, \\ m+2 \geq 3, \end{cases} \text{得 } m \geq \frac{21}{4};$$

当 $m = 0$ 时, 不合题意;

当 $m < 0$ 时, $mf(x_2) + 2 \in [m+2, -m+2]$, $\left[-\frac{13}{4}, 3\right] \subseteq [m+2, -m+2]$, 即

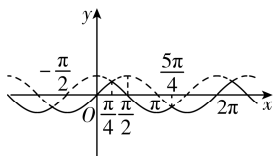
$$\begin{cases} m+2 \leq -\frac{13}{4}, \\ -m+2 \geq 3, \end{cases} \text{得 } m \leq -\frac{21}{4}.$$

综上, m 的取值范围为 $\left\{ m \mid m \leq -\frac{21}{4} \text{ 或 } m \geq \frac{21}{4} \right\}$.



综合上分

12. D 【解析】作出函数 $y = f(x)$ 的图象如图中实线部分所示.



对于 A, 由图可知函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 故 A 错误;

对于 B, 当 $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 或 $x = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $f(x)$ 取得最小值 -1 , 故 B 错误;

对于 C, $f(0) = 0$, $f(\pi) = -1$, $f(0) \neq f(\pi)$, 故 $f(x)$ 的最小正周期不是 π , 故 C 错误;

对于 D, 当且仅当 $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $f(x) > 0$, 故 D 正确.



13. 【解】(1) $\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增.

$\because f(1) = 0, \therefore$ 在 $(0, 1)$ 上 $f(x) < 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$, 由奇函数的性质得, 在 $(-\infty, -1)$ 上 $f(x) < 0$.

$\therefore f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$.

(2) 由 (1) 知 $N = \{m | g(\theta) < -1 \text{ 或 } 0 < g(\theta) < 1\}$, 则 $M \cap N = \{m | g(\theta) < -1\}$.

$g(\theta) = -\cos^2 \theta + m \cos \theta - 2m + 1 (0 \leq \cos \theta \leq 1)$.

设 $\cos \theta = a, 0 \leq a \leq 1, h(a) = -a^2 + ma - 2m + 1 = -\left(a - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4} - 2m + 1$.

① 当 $\frac{m}{2} \geq 1$, 即 $m \geq 2$ 时, $h(a)_{\max} =$

$$h(1) = -\left(1 - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4} - 2m + 1 < -1,$$

\therefore 当 $m \geq 2$ 时, $h(a) < -1$ 恒成立.

② 当 $\frac{m}{2} \leq 0$, 即 $m \leq 0$ 时, $h(a)_{\min} =$

$h(0) = -2m + 1 \geq 1, \therefore$ 当 $m \leq 0$ 时, $h(a) < -1$ 无解.

③ 当 $0 < \frac{m}{2} < 1$, 即 $0 < m < 2$ 时, 令

$h(a)_{\max} < -1$, 即 $h\left(\frac{m}{2}\right) < -1$, 即 $\frac{m^2}{4} - 2m + 1 < -1$, 解得 $4 - 2\sqrt{2} < m < 2$.

综上, $m > 4 - 2\sqrt{2}$, 即 $M \cap N = \{m | m > 4 - 2\sqrt{2}\}$.

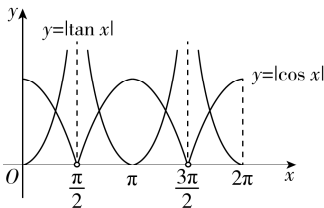
5.4.3 正切函数的性质与图象



基础上分

1. A 【解析】令 $f(x) = |\cos x| - |\tan x| = 0$, 得 $|\cos x| = |\tan x|$, 该方程在所给区间内的解的个数即为函数 $f(x)$ 的零点个数.

在同一坐标系内作出 $y = |\cos x|, y = |\tan x|, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 的图象, 如图所示.



由图可知, 两函数的图象的交点有 4 个,

所以当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 时, 函数 $f(x) = |\cos x| - |\tan x|$ 的零点个数为 4.



故选 A.

2. B 【解析】当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $y = |\tan x - \sin x| - \tan x - \sin x = \sin x - \tan x - \tan x - \sin x = -2\tan x$, 此时函数单调递减, 且 $y \geq 0$, 可排除 C, D; 当 $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\tan x - \sin x| - \tan x - \sin x = \tan x - \sin x - \tan x - \sin x = -2\sin x$, 此时函数单调递增, 且 $0 < y < 2$, 可排除 A. 故选 B.

3. A 【解析】因为 $2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 则函数 $f(x) = \tan 2x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$. 故选 A.

4. A 【解析】设 $z = x - \frac{\pi}{6}$, 因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right)$, 所以 $z \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\tan z \in (-\sqrt{3}, 1)$. 故所求值域为 $(-\sqrt{3}, 1)$. 故选 A.

5. B 【解析】由题意得 $\begin{cases} |\tan x| - \sqrt{3} > 0, \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} k\pi + \frac{\pi}{3} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi - \frac{\pi}{3}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{故函数}$$

$$y = \log_2(|\tan x| - \sqrt{3}) \text{ 的定义域为 } \left\{x \mid k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ 或 } k\pi + \frac{\pi}{3} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}. \text{ 故选 B.}$$

6. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 【解析】设 $t = \tan x (t \in \mathbf{R})$, 则 $y = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = \frac{3}{4}$. 所以 $y = \tan^2 x + \tan x + 1$ 的值域是 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

7. B 【解析】函数 $f(x) = \tan \frac{x}{2}$, 定义域为 $\{x \mid x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 由 $f(-x) = \tan \frac{-x}{2} = -\tan \frac{x}{2} = -f(x)$ 知函数为奇函数, 其最小正周期 $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. 故选 B.

8. BCD 【解析】A 选项, 由题图可知, $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$, 又 $\omega >$



0, 故 $\omega = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$, 故 A 错误;

B 选项, 由题图知, 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的一个交点坐标为 $\left(\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2}, 0\right)$, 即 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, 因为正切函数 $y = \tan x$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, 故 $f(x) = 4\tan\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$, 故 B 正确;

C 选项, 因为 $f(0) = 4\tan \frac{5\pi}{6} = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $f(x)$ 的图象与 y 轴交点的坐标为 $\left(0, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, 故 C 正确;

D 选项, 当 $x = \frac{7\pi}{3}$ 时, $4\tan\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$ 无意义, 故函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 故 D 正确. 故选 BCD.

9. A 【解析】因为 $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $a = \sin \frac{3\pi}{7} > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right) = \cos \frac{3\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $a < \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $c = \tan \frac{3\pi}{7} > \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以 $b < a < c$. 故选 A.

10. $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 【解析】因为 $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$, 所以 $1 - \sqrt{3}\tan x \geq 0$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

当 $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$ 单调递增, 所以 $y = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$ 单调递减, 即 $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$.

11. 2 【解析】令 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \omega x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

可得 $-\frac{\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega} < x < \frac{2\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$.



因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \begin{cases} -\frac{\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{3}, \\ \frac{5\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 3k-1 \leq \omega \leq \frac{6k+4}{5}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{由 } \frac{\pi}{\omega} \geq \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}, \text{ 得 } 0 < \omega \leq 2,$$

 **提示:** 区间长度与周期之间的关系

当 $k=1$ 时, 可得 $\omega=2$, 故 ω 的最大值为 2.

12. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】令 $-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$, 解得 $-\frac{\pi}{4} <$

$x < \frac{\pi}{4}$, 所以 $y = \tan 2x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单

调递增, 即 $f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x$ 在

$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 因为 $f(x)$ 在闭

区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 上有最大值 7, 最小值 3,

所以 $-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$, 且 $f(b) = 3, f\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

$$7, \quad \text{即} \quad \begin{cases} a - \sqrt{3} \tan 2b = 3, \\ a - \sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = 4, \\ b = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad \text{因为 } -\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } b = \frac{\pi}{12}, \text{ 故 } ab = \frac{\pi}{3}.$$



对点上分

1. C 【解析】因为函数 $f(x) = 2 \tan\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$,

$$\text{所以 } \frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \omega = 3k +$$

$2, k \in \mathbf{Z}$. 又 $\omega > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的最小正

$$\text{周期 } T = \frac{\pi}{|\omega|} = \frac{\pi}{3k+2}, k \in \mathbf{N}.$$

若 $\frac{\pi}{3k+2} = \frac{\pi}{3}$, 则 $k \notin \mathbf{N}$, 不符合题意, 故 A 错误;

若 $\frac{\pi}{3k+2} = \frac{\pi}{4}$, 则 $k \notin \mathbf{N}$, 不符合题意, 故 B 错误;

若 $\frac{\pi}{3k+2} = \frac{\pi}{5}$, 则 $k=1$, 故 C 正确;

若 $\frac{\pi}{3k+2} = \frac{2\pi}{5}$, 则 $k \notin \mathbf{N}$, 不符合题意, 故 D 错误. 故选 C.

2. B 【解析】因为函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$



$(\omega > 0, \varphi > 0)$ 的图象与直线 $y = a$ 的两个相邻交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$, 又 $T = \frac{\pi}{\omega} =$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = \tan(2x + \varphi)$.

则 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(2x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right)$,

又 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 为奇函数且 $\varphi > 0$,

所以 $\varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6} +$

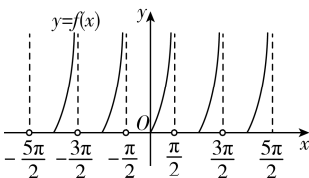
$\frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{N}^*)$,

所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

3. D 【解析】 $f(x) = \tan x + |\tan x| =$

$$\begin{cases} 2\tan x, x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbf{Z}, \\ 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right), k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示.



$f(x)$ 的最小正周期为 π , 故 A 错误;

$f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 故 B 错误;

$f(x)$ 的图象没有对称中心, 故 C 错误;

$$\text{由 } f(x) > 2\sqrt{3}, \text{ 得 } \begin{cases} 2\tan x > 2\sqrt{3}, \\ k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

所以 $f(x) > 2\sqrt{3}$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi,$

$\frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$, 故 D 正确. 故选 D.



综合上分

4. B 【解析】依题意, $f(x) = \tan x \cdot \sin x -$

$$\sin x - \tan x + 1 = (\tan x - 1)(\sin x - 1),$$

而 $x \in [0, 2\pi]$, 显然 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 且 $x \neq \frac{3\pi}{2}$, 因此

$\sin x \neq \pm 1$.

由 $f(x) = 0$, 得 $\tan x = 1$, 解得 $x = \frac{\pi}{4}$ 或 $x =$

$\frac{5}{4}\pi$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的零点个数是

2. 故选 B.



5. B 【解析】由 $\left(\tan \frac{\pi}{6}x - a\right)\left(\tan \frac{\pi}{6}x - a - 1\right) <$

0 , 得 $a < \tan \frac{\pi}{6}x < a + 1$,

令 $f(x) = \tan \frac{\pi}{6}x (x \neq 3 + 6k, k \in \mathbf{Z})$, 则其周期 $T = 6$,

且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}, f(2) = \sqrt{3}, f(4) = -\sqrt{3}, f(5) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f(6) = 0$.

当 $a \geq \sqrt{3}$ 时, 不等式 $a < \tan \frac{\pi}{6}x < a + 1$ 在 $(0, 2025)$ 内无正整数解;

当 $0 < a < \sqrt{3}$ 时, 因为 $\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} > 1$,

所以 $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} > 1$,

则不等式 $a < \tan \frac{\pi}{6}x < a + 1$ 在 $(0, 6]$ 内无解, 或只有一个正整数解 1 或 2,

而 $2025 = 6 \times 337 + 3$,

则在 $(0, 2025)$ 内可能有 $337 + 1 = 338$ (个) 整数解. 故选 B.

5.4 节测上分

1. A 【解析】令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x =$

$-\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$ 时, 对称中心为

点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$, 故 A 正确;

当 $k = 1$ 时, 对称中心为点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 当 $k =$

-1 时, 对称中心为点 $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$, 故 B,

C, D 错误.

2. A 【解析】由 $e^x - 1 \neq 0$ 得 $x \neq 0$, 故函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称. 设 $f(x) = \cos x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 则

$$f(-x) = \cos(-x) \cdot \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \cos x \cdot \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数, 函数图象关于原点中心对称, 排除 B, D.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\cos x > 0, \frac{e^x + 1}{e^x - 1} > 0$, 故

$f(x) > 0$, 选项 C 错误. 故选 A.

3. D 【解析】因为 $\frac{1}{2} = \ln \sqrt{e} < \ln 2 < \ln e = 1$,



所以 $\frac{1}{2} < a < 1$.

因为 $\cos \frac{3}{2} < \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, 所以 $b < \frac{1}{2}$.

因为 $1 = 2^{\sin 0} < 2^{\sin \frac{1}{2}} < 2^{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}$, 所以 $1 < c < \sqrt{2}$. 因此 $c > a > b$, 故选 D.

4. B 【解析】对于 A, 由题意得 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) +$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \right| + \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \right| = |\cos x| + |\cos x| = 2|\cos x| \text{ 不恒为}$$

0, 则 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对称,

故 A 错误;

对于 B, 由正切函数性质得 $y = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 且点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 为其图象的对称中心, **故 B 正确;**

对于 C, 由余弦函数性质得 $y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, **故 C 错误;**

对于 D, 若 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对

称, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0$,

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \neq 0,$$

所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对称,

故 D 错误. 故选 B.

5. C 【解析】对于 $f(x) = \sqrt{\sin x - \sin^2 x} +$

$$\lg(2\cos 2x - 1), \text{ 有 } \begin{cases} \sin x - \sin^2 x \geq 0, \\ 2\cos 2x - 1 > 0, \end{cases} \text{ 由}$$

$\sin x - \sin^2 x \geq 0$, 得 $0 \leq \sin x \leq 1$, 解得 $2k_1\pi \leq x \leq \pi + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 由 $x \in [0, 2\pi)$, 得 $0 \leq x \leq \pi$.

由 $2\cos 2x - 1 > 0$, 得 $\cos 2x > \frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\pi}{3} +$

$$2k_2\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 解得}$$

$$-\frac{\pi}{6} + k_2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}.$$

又由 $x \in [0, 2\pi)$, 得 $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

$$\text{或 } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi.$$

综上, $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} < x \leq \pi$, 所以 $f(x)$ 的定

义域为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, **故选 C.**



6. D 【解析】对于 A, 函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 因为 $f(-x) = \sin[\cos(-x)] + \cos[\sin(-x)] = \sin(\cos x) + \cos(\sin x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, **A 错误.**

对于 B, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 则 $\cos 1 \leq \cos(\sin x) \leq 1$, 当且仅当 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $\cos(\sin x)$ 取得最大值 1; 又 $-\sin 1 \leq \sin(\cos x) \leq \sin 1$, 当且仅当 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $\sin(\cos x)$ 取得最大值 $\sin 1$. 所以 $f(x)$ 的最大值为 $1 + \sin 1$, **B 错误.**

对于 C, 对于 $x \in \mathbf{R}, f(x + \pi) = \sin[\cos(x + \pi)] + \cos[\sin(x + \pi)] = -\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ 不能恒等于 $f(x)$, **C 错误.**

对于 D, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $t = \cos x$ 单调递减, 且 $0 < \cos x < 1$, 此时 $y = \sin t$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则由复合函数的单调性知, $y = \sin(\cos x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减;

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $u = \sin x$ 单调递增, 且 $0 < \sin x < 1$, 此时 $y = \cos u$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则由复合函数的单调性知, $y = \cos(\sin x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, **故 D 正确.**

7. ACD 【解析】对于 A, 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($0 < \omega < 4$) 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称, 则 $\frac{3\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = \frac{8k-2}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $0 < \omega < 4$, 所以取 $k = 1$, 则 $\omega = 2$, **故 A 正确;**

对于 B, $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 令 $f(x) = 0$,

得 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 所以 $x = \frac{\pi}{8} +$

$\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$, 当 $n = -1$ 时, $x = -\frac{3\pi}{8} < 0$, 当 $n = 0$

时, $x = \frac{\pi}{8}$, 当 $n = 1$ 时, $x = \frac{5\pi}{8} > \frac{3\pi}{8}$, 所以 f

(x) 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{8}\right)$ 上只有 1 个零点, **故 B**

错误;

对于 C, 因为 $f\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$



$\left. \frac{\pi}{4} \right] = \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = \sin 2x$, 所以 f

$\left(x - \frac{3\pi}{8} \right)$ 为奇函数, 故 C 正确;

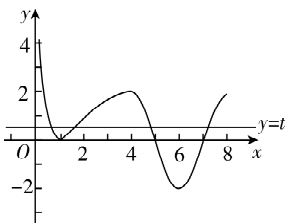
对于 D, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in$

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, 因为 $y = \cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ 上单调

递减, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right)$ 上单调递

减, 故 D 正确. 故选 ACD.

8. AC 【解析】画出函数 $f(x)$ 与 $y=t$ 的大致图象, 如图所示.



当 $0 < t < 2$ 时, 方程存在 4 个不同的解, $\frac{1}{4} <$

$x_1 < 1 < x_2 < 4, 4 < x_3 < 5, 7 < x_4 < 8$.

由 $|\log_2 x_1| = |\log_2 x_2|$ 得 $-\log_2 x_1 = \log_2 x_2$, 则

$x_1 x_2 = 1$, 由余弦函数的对称性知 $x_3 + x_4 =$

12, 所以 $\frac{x_3 x_4}{x_1 x_2} = x_3 x_4 = x_3 (12 - x_3) = -(x_3 -$

$6)^2 + 36, 4 < x_3 < 5$, 因为函数 $y = -(x - 6)^2 +$

36 在 $(4, 5)$ 上单调递增, 所以 $32 <$

$\frac{x_3 x_4}{x_1 x_2} < 35$.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + \frac{1}{x_1} + 12, \frac{1}{4} < x_1 < 1$, 因为

$y = x + \frac{1}{x} + 12$ 在 $\left(\frac{1}{4}, 1 \right)$ 上单调递减, 所以

$14 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < \frac{65}{4}$, 故 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 无最

小值, 故选 AC.

9. D 【解析】由题知 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$,

当 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $3x_1 + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$,

$\sin\left(3x_1 + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $2\sin\left(3x_1 +$

$\frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 2]$, 则 $f(x_1) \in [-1, 2]$,

设 $f(x_1)$ 的值域为 A , 则 $A = [-1, 2]$.

$g(x_2) = 2m\sin\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right) - m =$

$m\left[2\sin\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right],$

当 $x_2 \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $2x_2 + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right],$



$$\sin\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

$$\text{则 } 2\sin\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \in [-1, \sqrt{3}-1],$$

设 $g(x_2)$ 的值域为 B ,

由题知对任意的 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, 总存在

$x_2 \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立,

故 $A \subseteq B$.

①当 $m > 0$ 时, $B = [-m, (\sqrt{3}-1)m]$,

$$\text{由 } A \subseteq B, \text{ 得 } \begin{cases} -1 \geq -m, \\ 2 \leq (\sqrt{3}-1)m, \end{cases} \quad \text{解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} m \geq 1, \\ m \geq \sqrt{3}+1, \end{cases}$$

$$\therefore m \in [\sqrt{3}+1, +\infty).$$

②当 $m < 0$ 时, $B = [(\sqrt{3}-1)m, -m]$,

$$\text{由 } A \subseteq B, \text{ 得 } \begin{cases} -1 \geq (\sqrt{3}-1)m, \\ 2 \leq -m, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m \leq -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ m \leq -2, \end{cases} \therefore m \in (-\infty, -2].$$

综上所述, $m \in (-\infty, -2] \cup [\sqrt{3}+1, +\infty)$.

故选 D.

10. $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{2}$ 【解析】因为函数 $f(x) =$

$2\sin 3\omega x (\omega > 1)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{2}$,

所以 $\omega = \frac{4}{3}$.

因为 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left[\alpha,$

$\frac{\pi}{3}\right]$, 一个单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}, \beta\right)$, 所

以 $x = \frac{\pi}{3}$ 时函数 $f(x)$ 取得最大值, 即 $3\omega \times$

$$\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega = 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

又因为 $\beta - \alpha \geq \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x)$ 的最小正周

期 $T = \frac{2\pi}{3\omega} \geq \frac{\pi}{6}$, 解得 $\omega \leq 4$. 又 $\omega > 1$, 所以

$$1 < \omega \leq 4, \text{ 所以当 } k=1 \text{ 时, } \omega = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

11. $\frac{5}{6}$ 或 $\frac{11}{6}$ 【解析】因为对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒有

$$f(x) \leq f(2\pi),$$

所以 $f(2\pi) = 3$, 可得 $\cos\left(2\pi\omega +$

$$\frac{\pi}{3}\right) = 1,$$



可得 $2\pi\omega + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = k - \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减,

可得 $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{T}{2}$, 即 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{\omega}$, 解得 $0 < \omega \leq 2$.

当 $k=1$ 时, $\omega = \frac{5}{6}$; 当 $k=2$ 时, $\omega = \frac{11}{6}$.

当 $\omega = \frac{5}{6}$ 时, 若 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 则 $\frac{5}{6}x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{7\pi}{36}, \frac{11\pi}{18}\right]$, 符合题意,

当 $\omega = \frac{11}{6}$ 时, 若 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 则 $\frac{11}{6}x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{36}, \frac{17\pi}{18}\right]$, 符合题意.

故 $\omega = \frac{5}{6}$ 或 $\frac{11}{6}$.

12. 【解】 (1) 令 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} +$

$k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in$

\mathbf{Z} , 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为

$\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) (k \in \mathbf{Z})$, 无单调递减区间.

(2) 由 (1) 得, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内单调递增, 则当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

时, $f(0) \leq f(x) < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 即 $-1 \leq f(x) < 1$,

因此 $M = \{y | -1 \leq y < 1\}$. 由 $x \in [0, 6)$, 得

$0 \leq \frac{\pi}{6}x < \pi$, 由 $\tan \frac{\pi}{6}x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}x <$

$\frac{\pi}{2}$, 解得 $1 \leq x < 3$, 因此 $N = \{x | 1 \leq x < 3\}$,

所以 $M \cup N = [-1, 3)$.

13. 【解】 (1) 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$(k \in \mathbf{Z})$, 得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为

$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 由 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$, 得 $2x + \frac{\pi}{6} \in$

$\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$.

由正弦函数的图象可得 $f(x)$ 在

$\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$, 最



小值为 $\frac{1}{4}\sin \pi = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上的值域为 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

(3) 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{8} = 0$ 得 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, m + \frac{\pi}{12}\right]$ 上的 3 个零点为 $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$, 所以 $\frac{4\pi}{3} \leq m + \frac{\pi}{12} < 2\pi$, 得 $\frac{5\pi}{4} \leq m < \frac{23\pi}{12}$, 即 m 的取值范围为 $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}\right)$.

14.



思路导引

(1) 结合不等式的性质求当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $2x - \frac{3\pi}{4}$ 的范围, 结合余弦函数的性质及不等式的性质可求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 令 $g(x) = 2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) - 3, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$, 不等式 $f(x) + m < -1$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 内的解集为空集可转化为 $m \geq g(x)_{\max}$ 恒成立, 求函数 $g(x)$ 的最大值即可得解.

【解】(1) 由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 得 $-\frac{3\pi}{4} \leq 2x - \frac{3\pi}{4} \leq$

$\frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1$,

所以 $0 \leq -2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + 2 \leq 2 + \sqrt{2}$,

则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的最大值为 $\sqrt{2} + 2$, 此时 $x = 0$.

(2) 因为不等式 $f(x) + m < -1$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 内的解集为空集, 所以 $m <$

$2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) - 3$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 内的解

集为空集, 令 $g(x) = 2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) - 3$,

$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$, 则 $m \geq g(x)_{\max}$,

当 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$ 时, $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$,



则 $0 \leq \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1, -3 \leq g(x) \leq -1$.

故实数 m 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

5.5 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

课时 1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式



基础上分

1. A 【解析】 $\cos 105^\circ \cos 45^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 45^\circ = -\cos 75^\circ \cos 45^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 45^\circ = -(\cos 75^\circ \cos 45^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 45^\circ) = -\cos(75^\circ - 45^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

2. D 【解析】 $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$, $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $\tan 15^\circ - \tan 75^\circ = 2 - \sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$. 故选 D.

3. D 【解析】根据三角函数定义,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\frac{3}{5},$$

→ 关键点 P 点横坐标即为角 $\frac{\pi}{3} + \alpha$

的余弦值

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\pi}{3} + \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 所

$$\text{以 } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha = \sin\left[\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos \frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}. \text{ 故}$$

选 D.

4. B 【解析】因为 α, β 都是锐角, 所以 $0 < \alpha <$

$$\frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } 0 < \alpha + \beta < \pi,$$

$$\text{又 } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \sin(\alpha + \beta) =$$



$$\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)} = \frac{12}{13},$$

则 $\sin \beta = \sin(\alpha+\beta-\alpha) = \sin(\alpha+\beta) \cos \alpha - \cos$

$$(\alpha+\beta) \sin \alpha = \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{65}.$$

故选 B.

5. B 【解析】由 $\cos B = -\frac{1}{2}$, 知 B 为钝角,

故 A 为锐角, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, 故

$$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B =$$

$$\frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}. \text{ 故选 B.}$$

6. B 【解析】因为 $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{5}$, $\sin(\alpha-$

$$\beta) = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} =$$

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{3},$$

$$\text{则 } \frac{1-\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{1}{3} \text{ ①.}$$

因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 所

$$\text{以 } \cos(\alpha-\beta) = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3}{4} \text{ ②.}$$

$$\text{联立①②, 可得 } \tan \alpha \tan \beta = \frac{3}{5}.$$

故选 B.

7. $\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$



思路导引

寻找已知角 $\frac{5\pi}{12}-\alpha$ 与

待求角 $\frac{\pi}{12}-\alpha$ 之间的关系是关键, 一

般通过相加或相减寻找, 因为 $\left(\frac{5\pi}{12}-\right.$

$\alpha\bigg) - \left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right) = \frac{\pi}{3}$, 而 $\frac{\pi}{3}$ 是个特殊

角, 故转化为求 $\sin\left[\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right) - \frac{\pi}{3}\right]$,

利用两角差的正弦公式求解.

【解析】因为 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 所以 $\frac{5\pi}{12} - \alpha \in$

$$\left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right),$$

因为 $\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right) = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\right.$

$\alpha\bigg) = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right) = \sin\left[\left(\frac{5\pi}{12}-\right.$



$$\alpha) - \frac{\pi}{3}] = \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \cos \frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3-4\sqrt{3}}{10}.$$

8. $\frac{\pi}{4}$ 

思路导引 根据已知条件, 可得所求角 $\alpha + \beta$ 的范围为 $(0, \pi)$, 所以可以选用此角的正切值或余弦值来确定角的大小.

【解析】 因为 $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, β 为锐角, 所以

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan \beta =$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}, \text{ 可得 } \tan(\alpha + \beta) =$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1, \text{ 又 } \alpha, \beta \text{ 为锐}$$

角, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

一题多解

因为 α, β 为锐角, $\tan \alpha =$

$$\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \sin \alpha =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 所}$$

以 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 因为}$$

$$\alpha + \beta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

9. $\frac{7\pi}{4}$

【解析】 因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以

$$2\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ 则 } \cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} =$$

$$-\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{因为 } \sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \alpha \in$$

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } \beta - \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right],$$

$$\text{所以 } \cos(\beta - \alpha) = -\sqrt{1 - \sin^2(\beta - \alpha)} =$$

$$-\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{因为 } \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以 } \alpha + \beta \in \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right],$$



所以 $\cos(\alpha+\beta) = \cos[(\beta-\alpha)+2\alpha]$

→ **关键点** $\alpha+\beta \in \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$, 所以选

用余弦值

$$= \cos(\beta-\alpha) \cos 2\alpha - \sin(\beta-\alpha) \sin 2\alpha$$

$$= \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\alpha+\beta = \frac{7\pi}{4}$.

10. D 【解析】因为 $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(3\pi + x) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$,

$$\text{所以 } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \text{ 所以 } x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 故 } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3, \text{ 故 } \tan\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4} + \pi\right) = \frac{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan \pi}{1 - \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan \pi} =$$

3. 故选 D.

11. B 【解析】 $\because 2\sin \beta - \cos \alpha = 1$,

$$\therefore 2\sin \beta = 1 + \cos \alpha, \text{ 得 } 4\sin^2 \beta = 1 + 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha \text{ ①.}$$

$$\because \sin \alpha + 2\cos \beta = \sqrt{3}, \therefore 2\cos \beta = \sqrt{3} - \sin \alpha, \text{ 得 } 4\cos^2 \beta = 3 - 2\sqrt{3}\sin \alpha + \sin^2 \alpha \text{ ②.}$$

$$\text{由 ①+② 得, } 4 = 5 + 2\cos \alpha - 2\sqrt{3}\sin \alpha =$$

$$5 + 4\left(\frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha\right) = 5 + 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right), \text{ 即 } \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{1}{4}, \therefore \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{1}{4}. \text{ 故选 B.}$$



对点上分

1. A 【解析】原式 $= \sin 110^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ$

$$\sin 40^\circ = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \times \sin 40^\circ =$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

**一题多解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sin 110^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ = \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \\ &\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 2. D** 【解析】因为 $\tan 135^\circ = \tan (100^\circ + 35^\circ) = \frac{\tan 100^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 100^\circ \tan 35^\circ} = -1$, 所以 $-\tan 100^\circ - \tan 35^\circ + \tan 100^\circ \cdot \tan 35^\circ = 1$, 所以 $(1 - \tan 100^\circ)(1 - \tan 35^\circ) = 1 - \tan 100^\circ - \tan 35^\circ + \tan 100^\circ \tan 35^\circ = 1 + 1 = 2$. 故选 D.

- 3. C** 【解析】由于 $3\cos \alpha + \sqrt{10}\cos \beta = \frac{8}{5}$, $3\sin \alpha - \sqrt{10}\sin \beta = \frac{6}{5}$, 故两式平方后相加可得 $9 + 10 + 6\sqrt{10}\cos \alpha \cos \beta - 6\sqrt{10}\sin \alpha \sin \beta = 4$, 所以 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{15}{6\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$, 即 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{10}}{4}$.

方法总结

当遇到已知为 $a\cos \alpha + b\sin \beta = m$, $a\sin \alpha - b\cos \beta = n$ 时, 考虑将两式平方后相加再求解.

- 4. D** 【解析】因为 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}$, 所以 $\cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0$, 又因为 $\sin(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$, 所以 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$ ①, ①式的两边同时除以 $\cos \alpha \cos \beta$, 可得 $\tan \alpha + \tan \beta = 2 + 2\tan \alpha \tan \beta$, 又 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}$, 所以 $\tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{3}$. 故选 D.

一题多解

因为 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}$, 所以 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{4}{3}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}\cos \alpha \cos \beta$. 又因为 $\sin(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$, 所以 $\frac{4}{3}\cos \alpha \cos \beta = 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$, 所以 $-\frac{2}{3}\cos \alpha \cos \beta = 2\sin \alpha \sin \beta$, 所以 $\tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{3}$. 故选 D.

- 5. B** 【解析】因为 $\sin \theta + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$,



所以 $\sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 即

$$\frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 所以 } \sqrt{3} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 故 } \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \left(\theta + \frac{5\pi}{6} \right) = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} + \pi \right) = -\sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

6. B 【解析】因为 α 是锐角, 所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$,

因为 $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} > 0$, 所以 $\frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 β 是锐角, 所以 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{3} <$

$\beta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$,

因为 $\sin \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0$, 所以 $-\frac{\pi}{3} < \beta - \frac{\pi}{3} < 0$,

所以 $\cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 $\left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = \alpha + \beta$, 所以 \cos

$(\alpha + \beta) = \cos \left[\left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) \right]$

$= \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$

$\sin \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}}{15}$. 故选 B.

方法总结 常用的角的代换形式

$$\textcircled{1} \alpha = (\alpha + \beta) - \beta; \textcircled{2} \alpha = \beta - (\beta - \alpha);$$

$$\textcircled{3} \alpha = \frac{1}{2} [(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]; \textcircled{4} \alpha =$$

$$\frac{1}{2} [(\alpha + \beta) - (\beta - \alpha)]; \textcircled{5} \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$\left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right); \textcircled{6} \alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma).$$

7. B 【解析】根据题意, 有 $\cos A + \cos B = -$

$$m, \cos A \cos B = m^2 - \frac{3}{4},$$

则 $(\cos A + \cos B)^2 - 2 \cos A \cos B = (-m)^2 - 2$

$\left(m^2 - \frac{3}{4} \right)$, 整理可得 $\cos^2 A + \cos^2 B =$

$$\frac{3}{2} - m^2.$$

$$\sin A \sin B = \sqrt{\sin^2 A \sin^2 B}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)} \\
 &= \sqrt{1-(\cos^2 A + \cos^2 B) + \cos^2 A \cos^2 B} \\
 &= \left| m^2 - \frac{1}{4} \right|,
 \end{aligned}$$

又因为 $-1 < m < -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin A \sin B = m^2 - \frac{1}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \cos(\pi - A - B) = -\cos(A+B)$

$$= -\cos A \cos B + \sin A \sin B = \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) - \left(m^2 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2},$$

提示: 在三角形中求角, 优先选用余弦值

故 $C = \frac{\pi}{3}$. 故选 B.

8. D 【解析】由 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{5}{3}, \text{ 解得}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}
 &\text{则 } \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos \alpha} \\
 &= \frac{\cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^3 \alpha + \tan \alpha + \tan^2 \alpha + 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{16} + 1}{\frac{1}{64} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 1} = \frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$

故选 D.

9. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C = \pi$, \therefore

$$A+B = \pi - C,$$

$$\text{则 } \tan(A+B) = \tan(\pi - C) = -\tan C,$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A + \tan B - \tan(A+B)$$

$$= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \cdot \tan A \tan B$$

$$= \tan A \tan B \tan C,$$

$$\text{又 } \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C,$$

$$\therefore \tan A = 1, \because A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{4}.$$

10. (1) 【解】 $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta)$

$$= \frac{\sin[\alpha + (\alpha + \beta)]}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \alpha \cos(\alpha+\beta) + \cos \alpha \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha+\beta) \\
&= \cos(\alpha+\beta) + \frac{\cos \alpha \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha+\beta) \\
&= \frac{\sin(\alpha+\beta) \cos \alpha - \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha}{\sin \alpha} \\
&= \frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$

(2) 【证明】 $\cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\
&= (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) \\
&= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \\
&= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha, \text{得证.}
\end{aligned}$$

课时2 二倍角的正弦、余弦、正切公式



基础上分

1. D 【解析】 $\cos^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} = \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sin^2 \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

一题多解

$$\begin{aligned}
&\cos \frac{5\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{5\pi}{12} - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{所} \\
&\text{以 } \cos^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}, \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}, \\
&\text{所以 } \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 D.}
\end{aligned}$$

2. C 【解析】 $\frac{\tan 37.5^\circ}{1 - \tan^2 37.5^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{2\tan 37.5^\circ}{1 - \tan^2 37.5^\circ} = \frac{1}{2} \tan 75^\circ = \frac{1}{2} \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

3. D 【解析】 $\cos 72^\circ \sin 54^\circ \sin 30^\circ$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cos 72^\circ \cos 36^\circ \\
&= \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ} \\
&= \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{8\sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{8\sin 36^\circ}
\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{8}. \text{ 故选 D.}$$

方法总结

连续成二倍角的余弦值的积,有一个非常经典的公式: $\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \cdots \cdot \cos (2^{n-1}\theta) = \frac{\sin(2^n\theta)}{2^n \sin \theta} (n \geq 2, \sin \theta \neq 0)$.

4. B 【解析】 $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2 \alpha) = 2\sin^2 \alpha - 1 = \frac{7}{25}$. 故选 B.

5. A 【解析】由题意知 $\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{4}$. 故选 A.

6. B 【解析】 $5\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$
 $= -5\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= -5 \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot$
 $\left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right)$
 $= \frac{5}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{5}{2} (1 - \sin 2\alpha) = 1$, 解得 $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$, 故选 B.

7. B 【解析】 $\cos\left(2\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos \left[2 \left(\alpha + \frac{5\pi}{12} \right) \right] = 2\cos^2 \left(\alpha + \frac{5\pi}{12} \right) - 1$. 因为 $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{4}{5}$, 所以 $\cos \left(\alpha + \frac{5\pi}{12} \right) = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) = -\frac{4}{5}$, 故 $\cos \left(2\alpha + \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \times \left(-\frac{4}{5} \right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$, 故选 B.

8. C 【解析】因为 α 是第三象限角, 所以 $\alpha \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$, 即 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限角或第四象限角, $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$.

又 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限角, 所

以 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}$, 即 $\frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} =$

$\frac{4}{3}$, 整理得 $2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 3 \tan \frac{\alpha}{2} - 2 = 0$, 即



$$\left(\tan \frac{\alpha}{2} + 2\right) \left(2 \tan \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0, \text{ 解得 } \tan$$

$$\frac{\alpha}{2} = -2. \text{ 故选 C.}$$

9. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 【解析】将 $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 两边平方,

$$\text{得 } 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{5}, \text{ 则 } 2 \sin x \cos x = \frac{4}{5},$$

$$\text{即 } \sin 2x = \frac{4}{5},$$

由 $\sin x, \cos x$ 同号, 且 $x \in (0, \pi)$, 可得 x 为锐角,

$$\text{又 } \sin x > \cos x, \text{ 所以 } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以}$$

$$2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{故 } \cos 2x = -\sqrt{1 - \sin^2 2x} = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{所以 } \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} +$$

$$\sin 2x \sin \frac{\pi}{4} = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

10. A 【解析】 $\because 2 \cos 2\theta = 1 + \sin 2\theta,$

$$\therefore 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (\cos \theta + \sin \theta)^2, \text{ 即}$$

$$2(\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\cos \theta + \sin \theta) = (\cos \theta + \sin \theta)^2, \text{ 又 } \because \theta \text{ 为锐角}, \therefore \cos \theta + \sin \theta > 0,$$

$$\therefore 2(\cos \theta - \sin \theta) = \cos \theta + \sin \theta, \text{ 即}$$

$$\cos \theta = 3 \sin \theta, \therefore \tan \theta = \frac{1}{3}.$$

故选 A.

11. D 【解析】 $a = \cos 50^\circ \cos 127^\circ +$

$$\cos 40^\circ \sin 127^\circ = \sin 40^\circ \cos 127^\circ + \cos 40^\circ$$

$$\sin 127^\circ = \sin(40^\circ + 127^\circ) = \sin 167^\circ =$$

$$\sin(180^\circ - 13^\circ) = \sin 13^\circ,$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 56^\circ - \cos 56^\circ) =$$

$$\sin 56^\circ \cos 45^\circ - \cos 56^\circ \sin 45^\circ =$$

$$\sin(56^\circ - 45^\circ) = \sin 11^\circ,$$

$$c = \frac{1 - \tan^2 39^\circ}{1 + \tan^2 39^\circ} = \frac{\cos^2 39^\circ - \sin^2 39^\circ}{\cos^2 39^\circ + \sin^2 39^\circ} =$$

$$\frac{\cos^2 39^\circ - \sin^2 39^\circ}{\cos^2 39^\circ} =$$

$$\cos^2 39^\circ - \sin^2 39^\circ = \cos 78^\circ = \sin 12^\circ,$$

$$\therefore \sin 11^\circ < \sin 12^\circ < \sin 13^\circ, \therefore a > c > b. \text{ 故}$$

选 D.

12. $\left[-3, \frac{25}{8}\right]$ 【解析】 $f(x) = \cos 2x - 3 \sin x +$

$$1 = 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2.$$

$$\text{设 } \sin x = t, \text{ 则 } t \in [-1, 1], \text{ 设 } g(t) =$$

$$-2t^2 - 3t + 2, t \in [-1, 1],$$

$$\text{当 } t = -\frac{3}{4} \text{ 时, } g(t) \text{ 取最大值 } \frac{25}{8}, \text{ 当 } t = 1$$

$$\text{时, } g(t) \text{ 取最小值 } -3,$$



故 $f(x)$ 的值域为 $\left[-3, \frac{25}{8}\right]$.

13. $\frac{1}{3}$ 【解析】由 $\frac{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=3$,

得 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2+3\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$,

即 $\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}=2+3 \cdot \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha}$,

解得 $\tan \alpha=\frac{1}{2}$.

$$\frac{\cos 2 \alpha}{1+\sin 2 \alpha}=\frac{\cos ^2 \alpha-\sin ^2 \alpha}{(\cos \alpha+\sin \alpha)^2}=\frac{\cos \alpha-\sin \alpha}{\cos \alpha+\sin \alpha}=$$

$$\frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha}=\frac{1}{3}.$$



对点上分

1. D 【解析】因为 $\cos \alpha+\sqrt{3} \sin \alpha=\frac{3}{5}$, 所以

$$2 \sin \left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}, \text { 即 } \sin \left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{10},$$

$$\text { 则 } \cos \left(2 \alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2 \sin ^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-$$

$$2 \times \frac{9}{100}=\frac{41}{50} . \text { 故选 D. }$$

2. A 【解析】因为 $\tan 2 \theta=\frac{2 \tan \theta}{1-\tan ^2 \theta}=\frac{4}{3}$, 所

以 $2 \tan ^2 \theta+3 \tan \theta-2=0$, 解得 $\tan \theta=\frac{1}{2}$ 或

$$\tan \theta=-2 .$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$, 所以 $\tan \theta=-2$, 所以

$$\sin \theta \cos \theta=\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin ^2 \theta+\cos ^2 \theta}=\frac{\tan \theta}{1+\tan ^2 \theta}=\frac{-2}{1+4}=$$

$$-\frac{2}{5} . \text { 故选 A. }$$

一题多解

因为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$, 所以 $-\pi<$
 $2 \theta<0$, 根据 $\tan 2 \theta>0$, 可得 $-\pi<2 \theta<$
 $-\frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin 2 \theta=2 \sin \theta \cos \theta=-\frac{4}{5}$,
 故 $\sin \theta \cos \theta=-\frac{2}{5}$. 故选 A.

3. B 【解析】因为 $x \in\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2 \pi}{3}\right)$, 所以 $x-$

$$\frac{\pi}{6} \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text { 又 } \sin \left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5},$$

$$\text { 所以 } \cos \left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin ^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$\frac{3}{5}, \tan \left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin \left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos \left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4}{3},$$



$$\text{则 } \tan \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{2 \tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{1 - \tan^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} =$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7},$$

$$\text{所以 } \tan \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \tan \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{\sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{2} \right]}{\cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{2} \right]} =$$

$$-\frac{\cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right]}{\sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right]} = -\frac{1}{\tan \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right]} =$$

$$\frac{7}{24}. \text{ 故选 B.}$$

4. $\frac{1}{32}$ 【解析】因为 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, 所

以当 $\sin x \neq 0$ 时, $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$, 所以原式 =

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{4\pi}{11}}{2 \sin \frac{2\pi}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{6\pi}{11}}{2 \sin \frac{3\pi}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{8\pi}{11}}{2 \sin \frac{4\pi}{11}} \cdot$$

$$\frac{\sin \frac{10\pi}{11}}{2 \sin \frac{5\pi}{11}} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{\sin \frac{10\pi}{11} \sin \frac{8\pi}{11} \sin \frac{6\pi}{11}}{\sin \frac{\pi}{11} \sin \frac{3\pi}{11} \sin \frac{5\pi}{11}} =$$

$$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

提示: 利用诱导公式转化

一题多解

令原式乘 $2^5 \sin \frac{\pi}{11}$ 得,

$$2^5 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cdot$$

$$\cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = 2^4 \sin \frac{2\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cdot$$

$$\cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}$$

$$= 2^3 \sin \frac{4\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}$$

$$= 2^2 \sin \frac{8\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}$$

$$= 2^2 \sin \frac{3\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}$$

$$= 2 \sin \frac{6\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = 2 \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}$$

$$= \sin \frac{10\pi}{11} = \sin \frac{\pi}{11},$$

$$\text{则原式} = \frac{\sin \frac{\pi}{11}}{2^5 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$



5. C 【解析】 $a = \cos^2 33^\circ - \sin^2 33^\circ = \cos 66^\circ = \sin 24^\circ$,

$$b = \sqrt{\frac{1 - \cos 46^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (1 - 2\sin^2 23^\circ)}{2}} = \sin 23^\circ,$$

$$c = \frac{\tan 71^\circ - \tan 26^\circ}{1 + \tan 71^\circ \tan 26^\circ} = \tan(71^\circ - 26^\circ) = 1,$$

因为 $\sin 23^\circ < \sin 24^\circ < 1$, 所以 $b < a < c$. 故选 C.

6. C 【解析】由题知, $\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta +$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = m \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta \right),$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta = m \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \right), \text{ 即 } \cos \theta + \sin \theta = m (\cos \theta - \sin \theta),$$

所以 $(1+m)\sin \theta = (m-1)\cos \theta$, 则

$$\tan \theta = \frac{m-1}{m+1}.$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1-\tan^2 \theta} = \frac{4}{3}, \text{ 故 } 2\tan^2 \theta + 3\tan \theta -$$

$2 = 0$, 解得 $\tan \theta = -2$ 或 $\tan \theta = \frac{1}{2}$, 因为

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\tan \theta > 0$, 故 $\tan \theta = \frac{1}{2}$,

即 $\frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{2}$, 解得 $m = 3$. 故选 C.

7. A 【解析】函数 $f(x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 \omega x - 1) -$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + 1 = \frac{1}{2} \cos 2\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x +$$

$$1 = \cos\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

由 $f(x) = 0$, 得 $\cos\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$, 当

$$x \in [0, \pi] \text{ 时, } 2\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{3}\right],$$

由函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个零

点, 得 $3\pi \leq 2\pi\omega + \frac{\pi}{3} < 5\pi$, 解得 $\frac{4}{3} \leq \omega$

$$< \frac{7}{3},$$

所以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. 故选 A.

8. $-\frac{24}{25}$ 【解析】由题意可知, $\Delta = \frac{1}{25} - 4m \geq$

0 , 解得 $m \leq \frac{1}{100}$,

由根与系数的关系, 可得 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$,

$$\sin \alpha \cos \alpha = m,$$

$$\text{则 } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2m =$$

$$\frac{1}{25}, \text{ 解得 } m = -\frac{12}{25}, \text{ 符合 } m \leq \frac{1}{100},$$



$$\text{则 } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2m = -\frac{24}{25}.$$

易错警示 根据恒等式 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$ 可以求出参数 m 的取值, 如忽略此恒等式, 结果仍然携带参数.

9.2 【解析】 依题意 $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin 18^\circ$,

$$\begin{aligned} \text{则 } & \frac{m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ - 1} \\ &= \frac{2\sin 18^\circ \sqrt{4-(2\sin 18^\circ)^2}}{2\cos^2 27^\circ - 1} \\ &= \frac{2\sin 18^\circ \sqrt{4\cos^2 18^\circ}}{2\cos^2 27^\circ - 1} \\ &= \frac{4\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos(2 \times 27^\circ)} = \frac{2\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} \\ &= \frac{2\sin 36^\circ}{\cos(90^\circ - 36^\circ)} \\ &= \frac{2\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2. \end{aligned}$$

10. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ 【解析】 由 $\sin(2\alpha + \beta) +$

$$2\sin 2\alpha \cos \beta = 3\sin \beta,$$

得 $3\sin 2\alpha \cos \beta + \cos 2\alpha \sin \beta = 3\sin \beta$, 因为

$$\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right),$$

所以 $3\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \tan \beta = 3\tan \beta$, 所以

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{3\sin 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha} = \frac{6\sin \alpha \cos \alpha}{4\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{3\tan \alpha}{2\tan^2 \alpha + 1} = \frac{3}{2\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}}. \end{aligned}$$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $\tan \alpha \in (0, \sqrt{3})$,

则 $2\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\tan \alpha =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $\tan \beta \leq$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

又 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos \beta = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \beta + 1}}$, 所以

当 $\tan \beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 时, $\cos \beta$ 取得最小值, 且最

小值为 $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

11. 【解】 (1) 原式 =

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]} \\ &= \frac{\cos 2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} \\
 &= \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1.
 \end{aligned}$$

(2) 角 α 的终边经过点 $P(1, -3)$, 则 $\tan \alpha = -3$,

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{-3 + 1}{1 + 3} = \\
 &= -\frac{1}{2}, \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-6}{1 - 9} = \frac{3}{4}, \text{ 则} \\
 \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2\alpha &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

5.5.2 简单的三角恒等变换



基础上分

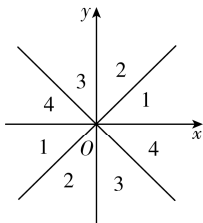
1. D 【解析】由 $\cos(\pi + \theta) = -\frac{1}{3}$, 可得

$$-\cos \theta = -\frac{1}{3}, \text{ 故 } \cos \theta = \frac{1}{3}.$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 因为 } \theta \text{ 是第四}$$

象限角, 如图所示, 所以 $\tan \frac{\theta}{2} < 0$, 所以

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



一题多解

由题可得 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 则

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 故 } \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \\
 &= \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

2. A 【解析】因为 $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 所

以 $3 - 3 \tan^2 \theta = \sqrt{5} + \sqrt{5} \tan^2 \theta$, 则 $\tan^2 \theta =$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{4}, \text{ 又 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以}$$

$$\tan \theta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$



一题多解

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0,$$

$$\text{又因为} \begin{cases} 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} \sin \theta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}, \\ \cos \theta = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}, \end{cases}$$

$$\text{所以} \tan \theta = \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

3. B 【解析】因为 $\sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{3}{5}$, 所

$$\text{以} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sin 2\alpha}{2} = -\frac{3}{10}.$$

4. A 【解析】 $\frac{1+\sin \theta + \cos \theta}{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}$

$$= \frac{2\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)}{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$= 2\cos \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{因为} \tan \theta = \frac{8}{15}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以} \begin{cases} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{8}{15}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} \sin \theta = \frac{8}{17}, \\ \cos \theta = \frac{15}{17}, \end{cases}$$

$$\text{又} \frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \text{所以} \cos \frac{\theta}{2} =$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \text{所以} 2\cos \frac{\theta}{2} = \frac{8\sqrt{17}}{17}.$$

故选 A.

5. $\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{10}$ 【解析】因为 $\sin \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. 因为

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \text{所以} \frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \text{所以}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \frac{\alpha}{2} =$$



$$\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} +$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{10}.$$

一题多解

因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$$-\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \text{ 所以 } \cos \alpha = \frac{3}{5}. \text{ 因为}$$

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \text{ 所以 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos \alpha -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}. \text{ 又 } \frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3} \in$$

$$\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 则 } \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4\sqrt{3}-3}{10}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{13-4\sqrt{3}}{20}} = \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{10}.$$

6. B 【解析】原式 $= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + \right.$

$$\left. \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

7. A 【解析】由 $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 可

$$\text{得 } -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \sin^2 \alpha -$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{3}, \text{ 又 } \sin \alpha + \sin \beta = m, \text{ 所以结合平}$$

$$\text{方差公式可得 } \sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{3m}.$$

8. C 【解析】 $2\sin(x - y) \cos(x + y) =$

$$2(\sin x \cos y - \cos x \sin y)(\cos x \cos y -$$

$$\sin x \sin y)$$

$$= 2(\sin x \cos x \cos^2 y - \sin y \cos y \sin^2 x - \sin$$

$$y \cos y \cos^2 x + \sin x \cos x \sin^2 y)$$

$$= 2[\sin x \cos x (\cos^2 y + \sin^2 y) - \sin y \cos y \cdot$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)]$$

$$= 2(\sin x \cos x - \sin y \cos y) = \sin 2x - \sin 2y,$$

由题意可知 $\sin 2x - \sin 2y = -\frac{6}{13}, \cos(x +$

$$y) = -\frac{5}{13}, \text{ 所以 } \sin(x - y) = \frac{3}{5}.$$



因为 $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $x - y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x + y \in (0, \pi)$, 又 $\sin(x - y) > 0$, $\cos(x + y) < 0$,

所以 $x - y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x + y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

所以 $\cos(x - y) = \sqrt{1 - \sin^2(x - y)} = \frac{4}{5}$,

$\sin(x + y) = \sqrt{1 - \cos^2(x + y)} = \frac{12}{13}$.

因为 $\sin 2x = \sin[(x + y) + (x - y)] = \sin(x + y)\cos(x - y) + \cos(x + y)\sin(x - y) = \frac{12}{13} \times$

$\frac{4}{5} + \left(-\frac{5}{13}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{33}{65}$,

$\cos 2x = \cos[(x + y) + (x - y)] = \cos(x + y)\cos(x - y) - \sin(x + y)\sin(x - y) = \frac{4}{5} \times$

$\left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = -\frac{56}{65}$,

所以 $\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{33}{56}$. 故选 C.

9. $-\frac{120}{119}$ 【解析】由和差化积公式得 \cos

$\alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{12}{13}$,

$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{5}{13}$,

则 $\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{5}{12}$.

所以 $\tan(\alpha - \beta) = \tan\left(2 \cdot \frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$

$\frac{2\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = -\frac{120}{119}$.

10. A 【解析】依题意, $\sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) +$

$\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) = \cos\left(\frac{A+B}{2} +$

$\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right)$,

则 $2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot$

$\cos \frac{A-B}{2}$, 在 $\triangle ABC$ 中, $-\frac{\pi}{2} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2}$, 所

以 $\cos \frac{A-B}{2} > 0$,

则 $\tan \frac{A+B}{2} = 1$, 又 $0 < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{A+B}{2} =$

$\frac{\pi}{4}$, 即 $A+B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角

形. 故选 A.



11. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 【解析】由积化和差公式得 f

$$(x) = \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(x + x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - x + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4},$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{3} \in [2k\pi, 2k\pi + \pi], k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right], \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } [0,$$

$$\pi] \text{ 上的单调递减区间为 } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

一题多解

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x = \frac{1}{4} (1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x + \\ &= \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right], \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上的单调递减区间为 } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

12. 【证明】 $\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)$

$$= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta$$

$$= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta,$$

同理可得

$$\sin(\beta+\gamma) \sin(\beta-\gamma) = \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma, \sin(\gamma+\alpha) \sin(\gamma-\alpha) = \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta+\gamma) \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) \sin(\gamma-\alpha) &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + \\ \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha &= 0, \text{ 故得证.} \end{aligned}$$

5.5 节测上分

1. C 【解析】 $\cos 77^\circ \cos 32^\circ + \cos 13^\circ \sin 32^\circ$

$$= \cos 77^\circ \cos 32^\circ + \sin 77^\circ \sin 32^\circ$$



$$= \cos(77^\circ - 32^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. D 【解析】由题意得 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 则

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{25}. \end{aligned}$$

3. B 【解析】 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right)\right] = 1 - 2\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2 \times \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$. 故 B 正确.

一题多解

令 $\alpha = \theta - \frac{\pi}{12}$, 则 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{12}$,

$$\begin{aligned} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\alpha = 1 - \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}. \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

4. A 【解析】因为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 又 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, 所以 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$, 所以

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

5. A 【解析】因为 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$, 又 $\tan(\alpha + \beta) = 3\tan \alpha = 6\tan \beta$, 所以 $\tan \alpha = 2\tan \beta$, 则 $6\tan \beta = \frac{2\tan \beta + \tan \beta}{1 - 2\tan \beta \tan \beta} = \frac{3\tan \beta}{1 - 2\tan^2 \beta}$. 又 α, β 都是锐角, 则 $\tan \alpha > 0$, $\tan \beta > 0$, 所以 $2 = \frac{1}{1 - 2\tan^2 \beta}$, 整理得 $2 - 4\tan^2 \beta = 1$, 解得 $\tan \beta = \frac{1}{2}$, $\tan \alpha = 1$, 则

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}. \text{ 故}$$

选 A.



6. B 【解析】 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

7. A 【解析】 $a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 14^\circ + \cos 14^\circ) = \sin 14^\circ \cos 45^\circ + \cos 14^\circ \sin 45^\circ = \sin(14^\circ + 45^\circ) = \sin 59^\circ,$

$$b = \sqrt{\frac{1 - \cos 122^\circ}{2}} = \sqrt{\sin^2 61^\circ} = \sin 61^\circ,$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{\cos 20^\circ - \sin 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\ &= \frac{\cos(60^\circ - 40^\circ) - \cos 60^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\ &= \frac{\sin 60^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \sin 60^\circ, \end{aligned}$$

由正弦函数 $y = \sin x$ 的单调性知 $a < c < b$.

8. B 【解析】因为 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \cos \alpha = \frac{4}{5},$

所以 $\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{5},$ 所以

$$\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$\frac{4}{5}, \text{ 所以 } \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{15},$$

故选 B.

9. C 【解析】由题意可知 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 7,$

则 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3},$ 故 $\tan(2\alpha - \beta) =$

$$\frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{4}{3} - 7}{1 - \frac{4}{3} \times 7} = 1.$$

因为 $0 \leq \alpha < \pi$, 且 $\tan \alpha > 1$, 所以 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2},$

所以 $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi.$

因为 $0 \leq \beta < \pi$, 且 $\tan \beta > 0$, 所以 $0 < \beta < \frac{\pi}{2},$

所以 $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$, 则 $0 < 2\alpha - \beta < \pi.$

因为 $\tan(2\alpha - \beta) = 1$, 所以 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}.$ 故

选 C.

10. B 【解析】由 $\alpha \in (0, \pi), 0 < \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} <$



$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin \alpha =$

$$\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \cos(\alpha + \beta - \alpha) = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \\ \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha &= \cos(\alpha + \beta) \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \\ &\times \frac{2\sqrt{5}}{5},\end{aligned}$$

由 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \pi$, 得 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$, 因

$$\text{为 } 0 < \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta < \pi$,

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\text{则 } \cos \beta = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

11. BC 【解析】因为 $\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha +$

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + \tan \alpha + \tan \beta =$$

$$(\tan \alpha + \tan \beta) \cdot \frac{2 - \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 0,$$

且 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 即

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 2,$$

$$\text{所以 } \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

$$3 \cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{9}, \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{9},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{2}{9}.$$

故选 BC.

12. A 【解析】由 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{\cos \beta}$,

$$\text{得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta},$$

$$\text{故 } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha,$$

$$\text{即 } \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

由 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $0 < \alpha + \beta <$

$$\pi, 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{则 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ 或 } \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi,$$

$$\text{即 } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \beta + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{故 } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ (舍).}$$



故 A 正确.

13. AC



思路导引

由题知 $\frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\pi}{3}$,

通过已知条件与两角和的正切公式

得 $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \beta$ 的值, 将 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \beta$ 看作方程 $x^2 - (3 - \sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$ 的两根, 解方程得到 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \beta$ 的值,可得 β 的值, 再由二倍角公式求得 $\tan \alpha$ 的值, 从而得到 α 的值.【解析】由题知 $\frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan \left(\frac{\alpha}{2} + \right.$

$$\left. \beta \right) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \beta}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \beta} = \sqrt{3}, \text{ 则 } \tan \frac{\alpha}{2} +$$

 $\tan \beta = 3 - \sqrt{3}$, 所以 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - (3 - \sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$ 的两根, 解得 $x_1 =$
 $1, x_2 = 2 - \sqrt{3}$.当 $\tan \frac{\alpha}{2} = 1$ 时, 因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 <$ $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, 此时 α 不存在, 故 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2 -$ $\sqrt{3}, \tan \beta = 1, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha =$

$$\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-6 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 因为 } \alpha \text{ 为锐}$$

角, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$. 故选 AC.14. D 【解析】由万能公式得 $\sin x =$

$$\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}, \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}, \text{ 代入原式}$$

$$\text{并化简得 } f(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \cdot$$

$$\left(\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \right) = \frac{4\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}}{\left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right)^2}.$$

令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 因为题中欲求最大值, 故可设 $t > 0$,

$$\text{则 } \frac{4\sqrt{3}t}{(t^2 + 1)^2} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\left(t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{\left[(\sqrt{t})^3 + \frac{1}{3\sqrt{t}} + \frac{1}{3\sqrt{t}} + \frac{1}{3\sqrt{t}} \right]^2}$$



$$\leq \frac{4\sqrt{3}}{\left[4\sqrt{(\sqrt{t})^3 \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{t}}\right)^3}\right]^2} = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号, 故所求最大值为 $\frac{9}{4}$. 故选 D.

15. BC 【解析】由 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

得 $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的定

义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 定义域

不关于原点对称, 所以函数 $f(x)$ 不是偶函数, $f(x)$ 的图象不关于坐标原点中心对称, 故 A, D 错误;

因为 $(1 - \sin x) \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \cos^2 \frac{x}{2} -$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right), \text{ 所以}$$

$$f(x) = \cos x (1 - \sin x) \cdot \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right),$$

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $2x \in (\pi, 2\pi)$, $y = \cos x$

在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 故 B 正确;

$y = \cos 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 但函数

$f(x)$ 的定义域是 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π ,

故 C 正确.

故选 BC.

16. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】因为 $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \cdot$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) =$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta\right) = \frac{1}{4},$$

所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta\right) = \frac{1}{2}$, 由 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 得

$$\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2\theta < \pi, \text{ 则 } \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$



$$\text{又 } \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = -\cos 2\theta,$$

$$\begin{aligned} \text{且 } \cos 2\theta &= \cos \left[\left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta \right) - \frac{2\pi}{3} \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \\ &\left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \sin^4 \theta - \\ \cos^4 \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \text{【解析】} \frac{1-2\sin^2 5^\circ}{2\sin 10^\circ} - 2\cos 10^\circ \\ &= \frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ} - 2\cos 10^\circ \\ &= \frac{\cos 10^\circ - 4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\cos 10^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\cos(30^\circ - 20^\circ) - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\cos 30^\circ \cos 20^\circ + \sin 30^\circ \sin 20^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{3}{2} \sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ \right)}{2\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin(30^\circ - 20^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. -\frac{1}{2} \quad & \text{【解析】由 } 4\sin \alpha \cos \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) \\ & (1 + \sin \beta) + (1 - \cos 4\alpha) \cos \beta = 0, \text{ 得} \\ & 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha (1 + \sin \beta) + 2\sin^2 2\alpha \cos \\ & \beta = 0, \\ & \text{又 } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } \pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}, \text{ 所以} \\ & \sin 2\alpha \neq 0, \text{ 所以 } \cos 2\alpha (1 + \sin \beta) + \sin \\ & 2\alpha \cos \beta = 0, \text{ 即 } \cos 2\alpha + \sin(2\alpha + \beta) = 0. \\ & \text{因为 } 2\alpha + \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right), \frac{7\pi}{2} - 2\alpha \in \\ & \left(2\pi, \frac{5\pi}{2} \right) \subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right), \text{ 所以 } \sin(2\alpha + \\ & \beta) = -\cos 2\alpha = \sin \left(\frac{7\pi}{2} - 2\alpha \right), \text{ 所以 } 2\alpha + \beta = \\ & \frac{7\pi}{2} - 2\alpha, \text{ 所以 } 4\alpha + \beta = \frac{7\pi}{2}, \text{ 则 } \frac{4\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{7\pi}{6}, \\ & \text{所以 } \sin \left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} \right) = \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19. \text{【解】} (1) \text{ 由题意可得, } \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) &= \\ \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} &= \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 3, \end{aligned}$$



即 $3-3\tan \alpha=\tan \alpha+1$, 所以 $\tan \alpha=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} (2) & \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin^2(\pi+\alpha)+2\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha+2\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha+2 \tan \alpha} \\ &= \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}+2 \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(3) 根据半角公式得 $\cos^2 \frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos \alpha}{2}$.

由 $\tan \alpha=\frac{1}{2}$, 即 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=\frac{1}{2}$, 可得 $\sin \alpha=\frac{1}{2} \cos \alpha$,

又因为 $\sin^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1$, 把 $\sin \alpha=\frac{1}{2} \cos \alpha$ 代入可得 $\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2+\cos^2 \alpha=1$,

即 $\frac{1}{4} \cos^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1$, 解得 $\cos \alpha=\pm \frac{2 \sqrt{5}}{5}$.

由 $\tan \left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3>\sqrt{3}$, 且角 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 的终边在第一象限,

得 $\frac{\pi}{3}+2 k \pi<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2 k \pi, k \in \mathbf{Z}$,

则 $\frac{\pi}{12}+2 k \pi<\alpha<\frac{\pi}{4}+2 k \pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\cos \alpha=\frac{2 \sqrt{5}}{5}, \cos^2 \frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{2 \sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{5+2 \sqrt{5}}{10}$.

20.

**思路导引**

(1) 根据倍角公式, 两角和与差的正弦公式化简 $f(x)=(1-\sqrt{3}) \cos^2 x+\sin x \cos x+\sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right) \sin \left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 再根据正弦函数的最小正周期公式即可求解;

(2) 令 $2 x-\frac{\pi}{3} \in\left[-\frac{\pi}{2}+2 k \pi, \frac{\pi}{2}+2 k \pi\right], k \in \mathbf{Z}$, 求得 $f(x)$ 的单调递增区间, 结合 $x \in[0, \pi]$ 即可求解.

【解】 (1) $f(x)=(1-\sqrt{3}) \cos^2 x+\sin x \cos x+\sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right) \sin \left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(1-$



$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3}) \times \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \\
 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - \\
 & \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \\
 & \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的最小} \\
 & \text{正周期为 } \frac{2\pi}{2} = \pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 令 } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x \in \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \right. \\
 \left. \frac{5\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } x \in [0, \pi],
 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[0, \frac{5\pi}{12} \right], \left[\frac{11\pi}{12}, \pi \right]$.

5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

5.6.1 匀速圆周运动的数学模型+

5.6.2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象



基础上分

1. A 【解析】令 $4x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, 得 $x = \frac{5\pi}{12}$, 所以

第四个关键点的坐标为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0 \right)$. 故选 A.

方法总结

用“五点法”作函数 $y = \cos x$ 的图象的五个关键点为 $(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0 \right), (2\pi, 1)$. 用“五点法”作函数 $y = \sin x$ 的图象的五个关键点为 $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1 \right), (2\pi, 0)$.

2. 【解】(1) 函数 $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$, 由 $\frac{\pi}{2}$

$$+ 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以函数}$$

$f(x)$ 的单调递减区间是

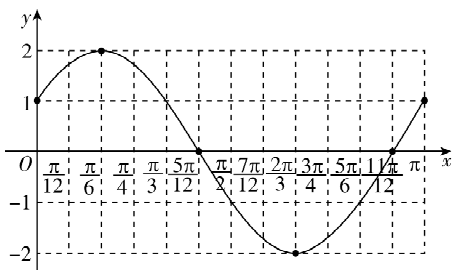
$$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right] (k \in \mathbf{Z}).$$

(2) 列表:



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$2x + \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
$f(x)$	1	2	0	-2	0	1

描点,连线,画出 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的大致图象如图:



3. C 【解析】 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right]$, 所以将 $y = \cos 2x$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 即可得到 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 故选 C.

4. A 【解析】由题意可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = T = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 所以可将 $y = \cos x$ 的图象上所有的点先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故选 A.

5. B 【解析】依题意, $f(x + \varphi) = \cos\left[2\left(x + \varphi\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 $2 \cdot \frac{\pi}{3} + 2\varphi - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 而 $\varphi > 0$, 所以当 $k = 1$ 时, φ 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

6. B 【解析】由题可得 $A = 2, \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3} \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right)$, 解得 $\omega = 2$.



$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 把 $\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$ 代入得

$$2\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 2, \therefore \frac{5\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

$$, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}. \therefore f(x) \text{ 的解析式为 } f(x) =$$

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \text{ 故 B 正确.}$$

7. C 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 根

$$\text{据题图知, } \frac{T}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } T =$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}, \text{ 解得 } \omega = 3.$$

$$\text{由图象可得 } A\sin\left(-\frac{3\pi}{12} + \varphi\right) = 0, \text{ 则 } -\frac{3\pi}{12} +$$

$$\varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故 } \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } 0 <$$

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{4}. \text{ 故选 C.}$$

8. B 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由

$$\text{题图知 } \frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}, \text{ 则 } T = \pi, \text{ 则}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 则 } \omega = 2,$$

$$\text{由 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1, \text{ 得 } \frac{\pi}{3} + \varphi =$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 可得 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) = \sin\left(2x +$$

$$\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{由题意, } g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2x +$$

$$\frac{\pi}{3}\right), \text{ 故 } g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

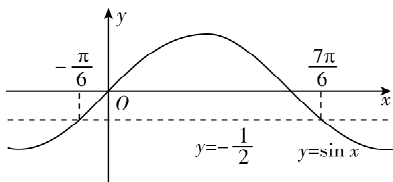
$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

9. D 【解析】因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\omega > 0$, 所以

$$-\frac{\pi}{6} \leq \omega x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, \text{ 因为 } f(x) \geq$$

$$-\frac{1}{2}, \text{ 所以由正弦函数图象可得 } -\frac{\pi}{6} < \frac{\omega\pi}{6}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \text{ 解得 } 0 < \omega \leq 8. \text{ 故选 D.}$$



10. C 【解析】由题意得 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x -$



$$(2\cos^2 x - 1) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 所以 } g(x) = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

两个函数的最小正周期 T 相等, 均为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$. 易知当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象交于 A, B 两点, 令 $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 得 $2x - \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $2x - \frac{\pi}{6} + 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以取 $k = 0, 1$, 故 $|x_A - x_B| = \frac{\pi}{2}$, 故选 C.

- 11. 【解】**(1) 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由题意可得, $A = 2, T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 故 $\omega = 2$, 因为 $f(0) = 2\sin \varphi = 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 根据“五点法”可得 $2x_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

$$(2) \text{ 由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

$$(3) \text{ 由题意得, } g(x) = 2\sin\left[4\left(x + \frac{\pi}{24}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8} \text{ 时, } \frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6},$$

所以 $\frac{1}{2} \leq \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, 所以 $1 \leq g(x) \leq 2$, 故 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ 上的值域为 $[1, 2]$.

5.6 节测上分

- 1. D 【解析】** 因为 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由图可知, 点 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最大值, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.



$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在单调递减区间内, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$, 所以 $\sin(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi) = \sin(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3}) = 0$, 由图可知, 点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 在单调递减区间内, 所以 $\frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = 1 + 6k, k \in \mathbf{Z}$.

设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期, 则由图象可知 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2|\omega|} > \frac{\pi}{3}$, 所以 $|\omega| < \frac{3}{2}$, 所以 $\omega = 1$,

所以 $f(x) = \sin(x + \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi) = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$, 所以 $f(\pi) = \sin(\pi + \frac{2\pi}{3}) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 D.

2. B 【解析】函数 $f(x)$ 的图象向左平移 π 个单位长度后所得图象的解析式为 $f(x + \pi) = 2\sin(\omega x + \omega\pi - \frac{\pi}{6})$. 又平移后的函数图象与原来的图象重合, 所以 $\omega x + \omega\pi - \frac{\pi}{6} = \omega x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = 2k, k \in \mathbf{Z}$.

又 $0 < \omega < 3$, 所以 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$. 当 $x \in (\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ 时, $0 < 2x - \frac{\pi}{6} < \pi$, 又 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以

$\frac{2x_1 - \frac{\pi}{6} + 2x_2 - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x_1 + x_2) = f(\frac{2\pi}{3}) = 2\sin(2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = 2\sin \frac{7\pi}{6} = 2\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -2\sin \frac{\pi}{6} = -1$, 故选 B.

3. A 【解析】因为函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π 且 $\omega > 0$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 则 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) = f(x - \varphi) = 2\sin[2(x - \varphi) - \frac{\pi}{3}] = 2\sin[2x - (2\varphi + \frac{\pi}{3})]$



$$\frac{\pi}{3} \Big) \Big].$$

若 $g(x)$ 为偶函数, 则 $2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 可知当 $k=0$ 时, 正实数 φ 取得最小值 $\frac{\pi}{12}$. 故选 A.

4. BCD 【解析】 $f(x) = (a \cdot \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2} = a \sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a \sin 2x + \cos 2x) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} \sin(2x+\varphi)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{1}{a}$, 因为 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{6}$, 故 $\pm \sqrt{1+a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 函数为非奇非偶函数, 故 A 错误;

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k=-1$ 时, $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$, 故 B 正确;

令 $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 可得 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, 故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 故 C 正确;

将函数 $y = 2\sin 2x$ 图象上各点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 横坐标不变, 然后把所得函数图象再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则

$$y = \frac{1}{2} \times 2 \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right] = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

即可得 $f(x)$ 的图象, 故 D 正确.

5. ACD 【解析】 $\because f\left(-\frac{\pi}{6}+x\right) + f\left(-\frac{\pi}{6}-x\right) = -2, \therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, -1\right)$ 对称.

提示: 函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) + f(a-x) = 2b \Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称

$\because f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 恒成立, \therefore 当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $\left(\frac{1}{4} + k_1\right) T = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$



$$(k_1 \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } \left(\frac{3}{4} + k_2\right) T = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 即 } T = \frac{\pi}{4k_1+1} (k_1 \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } T =$$

$$\frac{\pi}{4k_2+3} (k_2 \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T}, \therefore \omega = 8k_1 + 2 (k_1 \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } \omega = 8k_2 +$$

$$6 (k_2 \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore 0 < \omega < 4, \therefore \omega = 2.$$

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{12}, \text{ 则 } 2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即 } \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, \therefore f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 则 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } x = -\frac{5\pi}{12}, \text{ 即直线 } x = -\frac{5\pi}{12} \text{ 是}$$

$f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 A 正确;

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \therefore f(x) \in [1, 3],$$

故 B 错误;

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } -\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 即 } f$$


(x) 的单调递增区间为

$$\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z}), \text{ 故 C 正确;}$$

$$f(x) = 1, \text{ 即 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \text{ 即 } 2x + \frac{\pi}{3} =$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k_3\pi$$

$$(k_3 \in \mathbf{Z}),$$

 **提示:** 正弦函数 $y = \sin x$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}$ 在 $[0, 2\pi]$ 内的交点横坐标为

$$\frac{\pi}{6} \text{ 和 } \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{解得 } x = -\frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } x = \frac{\pi}{4} + k_3\pi$$

$$(k_3 \in \mathbf{Z}),$$

故方程 $f(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上的解从小到大依 次 为

$$\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}, \dots,$$

$$\therefore m \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}\right], \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ACD.



6. D 【解析】 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由 f

(x) 的部分图象知, $\frac{3T}{4} = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$, 解

得 $T = \pi$,

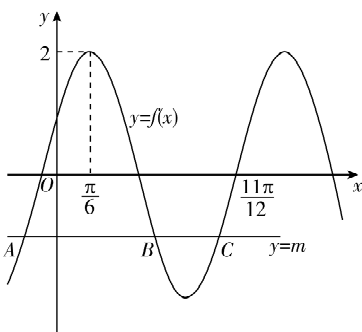
所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 又 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in$

\mathbf{Z} , 解得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) =$

$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

若 $m < 0$, 不妨设 A, B, C 的位置如图①所示, 则 $AC = x_C - x_A = \pi$,



图①

又 $AB = 2BC$, 所以 $AB = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\pi = x_B - x_A$,

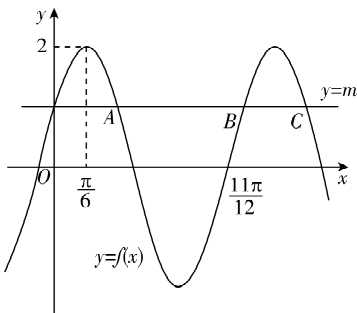
又 $x_B + x_A = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

所以 $x_A = -\frac{\pi}{6}$, 则 $m = f(x_A) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

$2\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = -1$;

同理当 $m > 0$ 时, 如图②, $AB = \frac{2}{3}AC =$

$\frac{2}{3}\pi = x_B - x_A$,



图②

令 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 解得 $x = \frac{k_1\pi}{2} -$

$\frac{\pi}{12}, k_1 \in \mathbf{Z}$, 所以点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象与

x 轴的一个交点, 即 A, B 关于直线 $x =$

$\frac{5\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 得 $x_B + x_A = 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$,



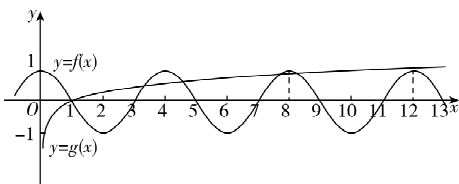
又 $x_B - x_A = \frac{2}{3}\pi$, 解得 $x_A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $m = f$

$$(x_A) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

综上, $m = \pm 1$. 故选 D.

7.5 【解析】在同一直角坐标系下画出函数

$f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ 与 $g(x) = \lg x (x > 0)$ 的大致图象如图所示.



易知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \in [-1, 1]$, 又 $g(8) < 1, g(12) > 1$, 故结合图象可知两函数图象的交点个数为 5.

8. $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[1, \frac{5}{4}\right]$ 【解析】将函数

$f(x) = \sin 2x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

长度, 得到函数 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right] =$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 再把所得函数图象

上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{2}{\omega} (\omega > 0)$

倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x) = \sin\left(2 \times$

$\frac{\omega}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\omega\pi}{4} - \frac{\pi}{4},$

$\omega\pi - \frac{\pi}{4}\right)$.

由 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ 上没有零点,

$$\text{得} \begin{cases} \frac{\omega\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \geq k\pi, \\ \omega\pi - \frac{\pi}{4} \leq (k+1)\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即} \begin{cases} 4k+1 \leq \omega \leq k + \frac{5}{4}, \\ 4k+1 \leq k + \frac{5}{4}, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所以}$$

$$0 < \omega \leq \frac{1}{4} \text{ 或 } 1 \leq \omega \leq \frac{5}{4}.$$

9. 【解】(1) 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由题

意, $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$, 则 $T = \pi$, 设 $\omega >$

0, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 则 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x +$



$\varphi)$,

显然 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$, 则 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 是满足题意的一个解析式(答案不唯一).

(2) 将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{7\pi}{12}\right) - \frac{5\pi}{6}\right] = \sin(2x - 2\pi) = \sin 2x$ 的图象, 再把所得图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到 $h(x) = \sin x$ 的图象, 所以 $p[h(x) - 1] \cdot \left[h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] < h(2x)$, 即 $p(\sin x - 1) \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] < \sin 2x$, 即 $p(\sin x - 1)(\cos x - 1) < \sin 2x$, 即 $p[\sin x \cos x - (\sin x + \cos x) + 1] < 2\sin x \cos x$.

令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 所以 $t \in (1, \sqrt{2}]$.

$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, 当 $t \in (1, \sqrt{2}]$ 时, $p < \frac{2(t+1)}{t-1} = 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{t-1}\right)$ 恒成立, 由 $y = 1 + \frac{2}{t-1}$ 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 可知 $y = 1 + \frac{2}{t-1}$ ($1 < t \leq \sqrt{2}$) 的最小值为 $1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$,

所以 $p < 6 + 4\sqrt{2}$, 故实数 p 的取值范围为 $(-\infty, 6 + 4\sqrt{2})$.

10. 【解】(1) 因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以最小正周期

$$T = \pi, \text{ 可得 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

由函数 $f(x)$ 为奇函数, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 可得 $f(0) = 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 所以 $\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以函数 $f(x) = 2\sin 2x$.

令 $2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}$,



所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}$.

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 再把图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到函数 $y = g(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$,

当 $4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{\pi}{24}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最小值, 最小值为 -2 ,

当 $4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最大值, 最大值为 $\sqrt{3}$,

故函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $[-2, \sqrt{3}]$.

(3) 由方程 $g(x) = \frac{4}{3}$, 即 $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}$, 得 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$,

因为 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$, 所以 $4x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right]$,

设 $\theta = 4x - \frac{\pi}{3}$, 则 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right]$, $\sin \theta = \frac{2}{3}$, 结合正弦函数 $y = \sin \theta$ 的图象,

可得方程 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right]$ 上有 5 个根, 分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$, 故 $n = 5$.

其中 $\theta_1 + \theta_2 = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi$, $\theta_2 + \theta_3 = 2 \times \frac{5\pi}{2} =$

5π , $\theta_3 + \theta_4 = 2 \times \frac{7\pi}{2} = 7\pi$, $\theta_4 + \theta_5 = 2 \times \frac{9\pi}{2} = 9\pi$,

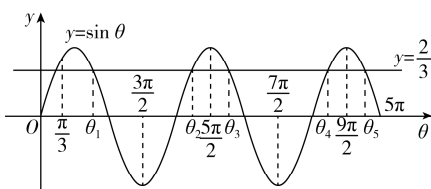
即 $4x_1 - \frac{\pi}{3} + 4x_2 - \frac{\pi}{3} = 3\pi$, $4x_2 - \frac{\pi}{3} + 4x_3 - \frac{\pi}{3} = 5\pi$, $4x_3 - \frac{\pi}{3} + 4x_4 - \frac{\pi}{3} = 7\pi$, $4x_4 - \frac{\pi}{3} + 4x_5 - \frac{\pi}{3} = 9\pi$,

解得 $x_1 + x_2 = \frac{11\pi}{12}$, $x_2 + x_3 = \frac{17\pi}{12}$, $x_3 + x_4 =$



$$\frac{23\pi}{12}, x_4 + x_5 = \frac{29\pi}{12},$$

$$\text{所以 } x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + (x_4 + x_5) = \frac{20\pi}{3}.$$



5.7 三角函数的应用



基础上分

1. A 【解析】由题意可知, $A = \frac{3}{2}$, 设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期, 则 $3^2 + \left(\frac{T}{2}\right)^2 = 5^2$,

$$\text{解得 } T = 8, \omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \varphi\right).$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 的图象过点 } \left(0, \frac{3}{4}\right),$$

$$\text{所以 } \frac{3}{2} \sin \varphi = \frac{3}{4}, \text{ 得 } \sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{因此频率 } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8}, \text{ 初相为 } \frac{\pi}{6}. \text{ 故选 A.}$$

2. C 【解析】由题意, 函数关系式为 $s =$

$$2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right),$$

由图象可知, 函数的最小正周期 $T = 0.4 \text{ s}$,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = \frac{2}{5}, \text{ 所以 } L = \frac{g}{25\pi^2} \approx \frac{980}{25 \times 3.14^2} \approx$$

$$4.0 \text{ cm. 故选 C.}$$

3. B 【解析】由题意可知 $\begin{cases} b+a=126, \\ b-a=78, \end{cases}$ 解得

$$b = 102, a = 24.$$

$$\text{又 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}, \text{ 得 } p(t) = 24\sin \frac{8\pi}{3}t + 102.$$

$$\text{令 } 90 \leq 24\sin \frac{8\pi}{3}t + 102 \leq 114, \text{ 得 } -\frac{1}{2} \leq$$

$$\sin \frac{8\pi}{3}t \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{令 } x = \frac{8\pi}{3}t, x \in [0, 2\pi], \text{ 则 } -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 函数 } y = \sin x, x \in [0, 2\pi] \text{ 的图象如图}$$

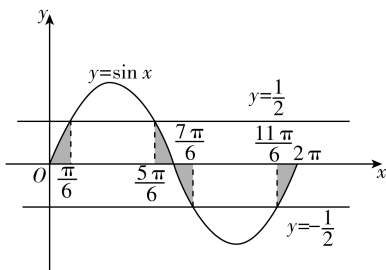
所示, 由图可知, 此人的血压在 $[90,$

$$114] \text{ 之间的时长约为 } \left[\frac{\pi}{6} + \left(\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) +$$



$$\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) \times \frac{3}{8\pi} = 0.25 \text{ (s)}. \text{ 故 B}$$

正确.



4. C 【解析】由题意知 $f(k) =$

$$2\,000 \cos\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\,500,$$

$$\text{令 } 2\,000 \cos\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\,500 \geq 3\,500,$$

$$\text{即 } \cos\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}, \text{ 解得 } 2n\pi - \frac{\pi}{3} \leq$$

$$\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } 12n - 6 \leq k \leq 12n - 2, n \in \mathbf{Z}, \text{ 结合 } 1 \leq k \leq 12,$$

提示: 月份自带取值范围

可知当 $n=1$ 时, $6 \leq k \leq 10$, 即 k 取 6, 7, 8, 9, 10, 即一年中是“旺季”的月份有 5 个, 故选 C.

5. B 【解析】由题可知小球运动的周期 $T =$

$$2 \text{ 秒}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所以 } \frac{2\pi}{\omega} = 2, \text{ 解得 } \omega = \pi,$$

当 $t=0$ 时, $A \sin \varphi = -A$, 即 $\sin \varphi = -1$, 又

$$|\varphi| < \pi, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ 则 } h(t) = A \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -A \cos \pi t, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\text{因为 } h(9) = -A \cos 9\pi = A, h\left(\frac{5}{3}\right) =$$

$$-A \cos \frac{5}{3}\pi = -\frac{1}{2}A, \text{ 所以 } t=9 \text{ 与 } t=\frac{5}{3} \text{ 时小}$$

球偏离于平衡位置的距离之比为

$$\frac{A}{\left|-\frac{1}{2}A\right|} = 2, \text{ 故 B 正确;}$$

若 $0 < t < t_0$, 则 $0 < \pi t < \pi t_0$, 又当 $0 < t < t_0$ 时, 小球有且只有三次到达最高点, 所以 $5\pi < \pi t_0 \leq 7\pi$, 解得 $5 < t_0 \leq 7$, 即 $t_0 \in (5, 7]$, 故 C 错误;

$$h(t) = -A \cos \pi t, \text{ 令 } t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{3}{4}, \text{ 则}$$

$$h(t_1) = -A \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}A, h(t_2) =$$

$$-A \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A, \text{ 满足 } 0 < t_1 < t_2 < 2 \text{ 且 } t_1, t_2 \text{ 时}$$

刻小球偏离于平衡位置的距离相同, 此时



$\sin\left(\frac{\pi}{t_1+t_2}\right) = \sin \pi = 0$, 故 D 错误. 故选 B.

6.8 【解析】因为所有泛音的频率都是基音

频率的整数倍, 所以 $\frac{\frac{48}{n^2}+n}{2\pi} = k_1 \cdot \frac{2}{3 \cdot 2\pi}$,

$\frac{\frac{48}{n^2}-n}{2\pi} = k_2 \cdot \frac{2}{3 \cdot 2\pi}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,

所以 $\frac{48}{n^2}+n = \frac{2}{3}k_1, \frac{48}{n^2}-n = \frac{2}{3}k_2, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

两式相加得 $\frac{96}{n^2} = \frac{2}{3}(k_1+k_2), k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 所

以 $n^2 \cdot (k_1+k_2) = 144 = 2^4 \times 3^2$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, 故 $n=1, 2, 3, 4, 6, 12$.

→ **关键点** 确定 n 的值是根据 144 的因数考虑的

两式相减得 $k_1-k_2 = 3n \in \mathbf{Z}$.

当 $n=1$ 时, $\begin{cases} k_1+k_2=144, \\ k_1-k_2=3, \end{cases}$ 无整数解, 不满足要求,

当 $n=2$ 时, $\begin{cases} k_1+k_2=36, \\ k_1-k_2=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1=21, \\ k_2=15, \end{cases}$ 满足要求,

当 $n=3$ 时, $\begin{cases} k_1+k_2=16, \\ k_1-k_2=9, \end{cases}$ 无整数解, 不满足要求,

当 $n=4$ 时, $\begin{cases} k_1+k_2=9, \\ k_1-k_2=12, \end{cases}$ 无整数解, 不满足要求,

当 $n=6$ 时, $\begin{cases} k_1+k_2=4, \\ k_1-k_2=18, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1=11, \\ k_2=-7, \end{cases}$ 满足要求,

当 $n=12$ 时, $\begin{cases} k_1+k_2=1, \\ k_1-k_2=36, \end{cases}$ 无整数解, 不满足要求.

综上, $n=2$ 或 6, 所有可能取值之和为 8.

7. 【解】(1) 因为 $y=f(t)$ 图象上最低点的坐标为 $(2, -4)$, 最高点的坐标为 $(14, 12)$,

所以 $A = \frac{12-(-4)}{2} = 8$, 设 $f(t)$ 的最小正周

期为 T , 则 $\frac{T}{2} = 14-2 = 12, b = \frac{12-4}{2} = 4$,

由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 24$, 解得 $\omega = \frac{\pi}{12}$, 将 $(14, 12)$ 代

入解析式, 有 $8\sin\left(\frac{\pi}{12} \times 14 + \varphi\right) + 4 = 12$,

故 $\frac{\pi}{12} \times 14 + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_0\pi, k_0 \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2k_0\pi, k_0 \in \mathbf{Z}$,

由 $|\varphi| < \pi$, 得 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(t) =$



$$8\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi\right) + 4, 0 \leq t \leq 24.$$

$$(2) \text{ 令 } 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi\right) + 4 < 0,$$

$$\text{得 } \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi\right) < -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in$$

$$\mathbf{Z}, \text{ 解得 } 22 + 24k < t < 30 + 24k, k \in \mathbf{Z},$$

因为 $0 \leq t \leq 24$, 所以 $0 \leq t < 6$ 或 $22 < t \leq 24$,
所以该商场的中央空调在该天内开启的
时长为 8 h.

8. C 【解析】∵ 函数的最小正周期 $T = 60$,

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}. \text{ 设所求函数的解析式为 } y =$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \varphi\right),$$

 **提示:** 秒针按顺时针方向走动

$$\therefore \text{ 初始位置为 } P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \therefore \text{ 当 } t = 0$$

$$\text{时, } y = \frac{1}{2}, \therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}, \text{ 又 } y \text{ 在 } t = 0 \text{ 处“下$$

$$\text{降”, } \therefore \varphi \text{ 可取 } \frac{\pi}{6}, \therefore \text{ 函数解析式可以为}$$

$$y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{6}\right). \text{ 故 C 正确.}$$

一题多解

$$\therefore P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \therefore \angle P_0 O x =$$

$$\frac{\pi}{6}. \text{ 设 } t \text{ 秒后从点 } P_0 \text{ 运动到 } P, \text{ 由题}$$

意知秒针旋转一周的时间为 60 秒,

$$\text{因此角速度 } \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ (弧度/秒)},$$

$$\therefore t \text{ 秒后秒针顺时针旋转了 } \omega t =$$

$$\frac{\pi}{30}t \text{ 弧度, 当秒针停在 } OP \text{ 位置时,}$$

$$\angle P_0 O P = -\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{6}, \therefore \text{ 点 } P \text{ 的纵坐标}$$

$$y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 故 C 正确.}$$

9. $\frac{\pi}{2}$ 【解析】由题意可知, 轮子的半径 $r =$

0.5 m, 则轮子滚动一周的水平距离为
 $2\pi r = \pi$ (m), 如图所示, O 为轮子中心, 设
轮子滚动了 x m 后轮子外边沿上的点 A 到
达点 A' 位置, 则点 A 绕点 O 转过的角度为

$$\frac{x}{r} = 2x, \text{ 过点 } A' \text{ 作 } A'C \text{ 垂直地面于点 } C, \text{ 过}$$

点 O 作 $OB \perp A'C$ 于点 B ,

$$\text{则 } A'C = A'B + BC = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$



所以 $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, x \geq 0$.

由 $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2}$, 可得 $\cos 2x =$

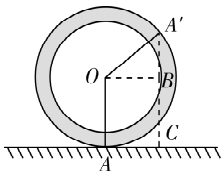
0, 所以 $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{4} +$

$\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 令 $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}, x_2 = \frac{\pi}{4} +$

$\frac{k_2\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z}$, 且 $0 < k_1 < k_2$, 所以 $x_2 - x_1 =$

$\frac{(k_2 - k_1)\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 所以当 $k_2 - k_1 = 1$ 时,

$x_2 - x_1$ 取得最小值 $\frac{\pi}{2}$.



10. 【解】(1) 设 1 号座舱 (M 点) 与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系式为 $h(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + b (A > 0, \omega > 0, t \geq 0)$, 依题意可得 $A = 30, b = 32$, 则 $h(t) = 30 \sin(\omega t + \varphi) + 32$.

依题意, $T = 24$ 分钟, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{12}$ (弧度/分钟).

由题知, $h(0) = 30 \sin \varphi + 32 = 32$, 又 $t = 0$ 时, 1 号座舱 (M 点) 处于上升状态, 故可

取 $\varphi = 0, \therefore h(t) = 30 \sin \frac{\pi}{12}t + 32 (t \geq 0)$

(答案不唯一).

(2) 令 $h(t) = 17$, 即 $30 \sin \frac{\pi}{12}t + 32 = 17$, 则

$\sin \frac{\pi}{12}t = -\frac{1}{2}, \because 0 \leq t \leq 24, \therefore 0 \leq \frac{\pi}{12}t \leq$

$2\pi, \therefore \frac{\pi}{12}t = \frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{12}t = \frac{11\pi}{6}$, 解得 $t = 14$ 或

$t = 22$, 故当 $t = 14$ 或 $t = 22$ 时, 1 号座舱 (M 点) 与地面的距离为 17 米.

专题上分 7

三角恒等变换

1. B 【解析】 $\because \sin(\theta + 20^\circ) = \cos(\theta - 10^\circ) + \cos(\theta + 70^\circ) = \cos(\theta - 10^\circ) + \sin(20^\circ - \theta),$

$\therefore \sin(20^\circ + \theta) - \sin(20^\circ - \theta) = 2 \cos 20^\circ \cdot \sin \theta = \cos(\theta - 10^\circ),$

$\because \cos(\theta - 10^\circ) = \cos \theta \cos 10^\circ + \sin \theta \cdot \sin 10^\circ, \therefore 2 \cos 20^\circ \sin \theta = \cos \theta \cos 10^\circ + \sin \theta \sin 10^\circ,$

$\therefore \tan \theta = \frac{\cos 10^\circ}{2 \cos 20^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{2 \cos(30^\circ - 10^\circ) - \sin 10^\circ} =$



$$\frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3} \cos 10^\circ + \sin 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 B.}$$

2. B 【解析】由题知 $\tan 2\alpha = \tan [(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{2+4}{1-2 \times 4} = -\frac{6}{7},$

$$\tan 2\beta = \tan [(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{2-4}{1+2 \times 4} = -\frac{2}{9}.$$

$$\text{故 } \tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta = \left(-\frac{6}{7}\right) \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{21}.$$

故选 B.

3. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】 $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + \alpha < \frac{2\pi}{3},$ 故由 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{10}}{10},$

$$\text{得 } \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\because -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0, \therefore -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} - \beta < \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又 } \because \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = -\cos\left[\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\right]$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \alpha - \beta = \frac{\pi}{4}.$$

4. B 【解析】由 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin \alpha = \frac{2}{3},$ 可

$$\text{得 } \frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha - \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

5. A 【解析】因为 $2\sin \alpha \cos \alpha = \cos 2\beta,$ 所以

$$\sin 2\alpha = \cos 2\beta = \sin\left(2\beta + \frac{\pi}{2}\right). \text{ 因为}$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以 } \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} =$$

$$\frac{1 + \cos\left[2\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{2}, \text{ 故 } \cos 2\alpha =$$



$\cos\left(2\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $2\alpha = 2\beta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故 $\tan(\alpha - \beta) = 1$. 故选 A.

6. $\frac{1}{4}$ 【解析】原式 $= \sin^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ \right)$

$$= \sin^2 20^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 160^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ - \frac{3}{2} \sin^2 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ - \frac{1}{4} (1 - \cos 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ + \frac{1}{4} \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin(40^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 70^\circ$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{1}{4}.$$

7. D 【解析】 $\because \tan \alpha \cdot \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \alpha \cdot \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{2}{3}$, $\therefore 3 \tan^2 \alpha + 5 \tan \alpha - 2 = 0$, 解得 $\tan \alpha = -2$ 或 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ (舍去), 所以由万能公式, 得 $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$. 故选 D.

8. A 【解析】 $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{7}}$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}},$$

由积化和差公式得 $2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}\right) = \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}$,

同理可得 $2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7}$,



$$2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} \right) = \sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{5\pi}{7},$$

$$\text{则 } 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}, \text{ 得到}$$

$$\frac{2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$\frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}, \text{ 故选 A.}$$

9. 【解】(1) $f(x) = \frac{\cos 2\omega x + \cos \frac{2\pi}{3}}{2} -$

$$\frac{1}{2}\sin 2\omega x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos 2\omega x - \frac{1}{2}\sin 2\omega x =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos \left(2\omega x + \frac{\pi}{4} \right),$$

若 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{则 } f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi (\omega > 0),$$

$$\therefore \omega = 1,$$

$$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{由 } 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解}$$

$$\text{得 } k\pi - \frac{\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8} (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递减区间是 } \left[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8} \right] (k \in \mathbf{Z}),$$

又 $x \in [0, \pi]$, $\therefore f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[0, \frac{3\pi}{8} \right]$ 和 $\left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right]$.

(2) 若 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,


则 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \left(2\omega x + \frac{\pi}{4} \right)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处取到最大值或最小值,

$$\therefore 2\omega \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore \omega = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \omega > 0, \therefore k = 1 \text{ 时, } \omega_{\min} = \frac{3}{2}.$$

**专题上分 8** ω 的求解

1. A 【解析】函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$.

 **提示**: 求解三角函数的图象与性质问题时, 一般先将函数的解析式化为形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的形式

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi + \pi}{6} \right)$. 由函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ 内没有零点, 得 $\frac{\omega\pi + \pi}{6} \leq \pi$, 解得 $\omega \leq 5$. 由 $f(x + \pi) = f(x)$, 得 π 是函数 $f(x)$ 的一个周期, 则 $\pi = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}, k \in \mathbf{N}^*$, 解得 $\omega = 2k, k \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $k=2$ 时, ω 取得最大值 4, 故选 A.

2. C 【解析】根据题意, 令 $f(x) = 0$, 即 $-\frac{1}{2} \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} = 0, \therefore \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) = 1, \therefore \omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z}),$$

当 $k=-1$ 时, $x_0 = -\frac{5\pi}{3\omega} < 0$;

当 $k=0$ 时, $x_1 = \frac{\pi}{3\omega} > 0$;

当 $k=1$ 时, $x_2 = \frac{7\pi}{3\omega} > 0$;

当 $k=2$ 时, $x_3 = \frac{13\pi}{3\omega} > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 内恰有两个零点,

$$\therefore \begin{cases} x_2 \leq \pi, \\ x_3 > \pi, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{7\pi}{3\omega} \leq \pi, \\ \frac{13\pi}{3\omega} > \pi, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{7}{3} \leq \omega < \frac{13}{3}. \text{ 故}$$

选 C.

一题多解

根据题意, 令 $f(x) = 0$, 即

$$-\frac{1}{2} \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} = 0,$$

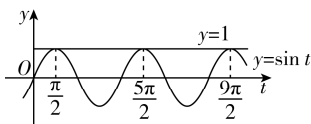
$$\therefore \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) = 1.$$

由函数 $f(x) = -\frac{1}{2} \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 内恰有两个零点, 得 $\sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ 在区间 $[0, \pi]$ 内恰有两个解.



当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \omega\pi + \frac{\pi}{6} \right]$, $\therefore \frac{5\pi}{2} \leq \omega\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{9\pi}{2}$, 解得 $\frac{7}{3} \leq \omega < \frac{13}{3}$.

故选 C.



3. B 【解析】当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\omega\pi - \pi}{4}\right]$, $\therefore f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{3\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$, $\therefore \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}\right]$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4\omega}$, 解得 $\omega \leq 3$, $\therefore \omega$ 的最大值为 3. 故选 B.

一题多解

由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 得 $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\right]$, $\therefore f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, $\therefore \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega \leq 3$, 故 ω 的最大值为 3. 故选 B.

4. D 【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调, 所以 $\frac{T}{2} \geq \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T \geq \pi$. 又因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} < \pi \leq T$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{6}$ 对称, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 时取最值(最大值或最小值). 又因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\pi\right)$ 上有且仅有 3 个极值点, 则有 $\begin{cases} \frac{3}{2}T < 2\pi - \frac{\pi}{6}, \\ 2T \geq 2\pi - \frac{\pi}{6}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} T < \frac{11\pi}{9}, \\ T \geq \frac{11\pi}{12}, \end{cases}$ 又因



为 $T \geq \pi$, 所以 $\pi \leq T < \frac{11\pi}{9}$, 即 $\pi \leq \frac{2\pi}{\omega} < \frac{11\pi}{9}$

($\omega > 0$), 解得 $\frac{18}{11} < \omega \leq 2$, 则 ω 的取值范围

为 $\left(\frac{18}{11}, 2\right]$. 故选 D.

5.11 【解析】 因为直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 是曲线 $y =$

$\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的一条对称轴, 所以

$\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = 4k + 3, k \in$

\mathbf{Z} . 由 $-\frac{\pi}{2} \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $-\frac{\pi}{4\omega} \leq x \leq \frac{3\pi}{4\omega}$,

则函数 $y = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}\right]$ 上

单调递增, 因为函数 $y = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区

间 $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ 上不单调, 所以 $\frac{3\pi}{4\omega} < \frac{\pi}{12}$, 解得

$\omega > 9$. 因为 $\omega = 4k + 3, k \in \mathbf{Z}$ 且 $\omega > 9$, 所以 ω 的最小值为 11.

一题多解

因为直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $y =$

$\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 图象的一条对

称轴, 所以 $\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

即 $\omega = 4k + 3, k \in \mathbf{Z}$. 因为函数 $y =$

$\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ 上不单

调, 所以该函数图象在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 内存

在对称轴. 由 $\omega x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $x = \frac{k\pi}{\omega} + \frac{3\pi}{4\omega}, k \in \mathbf{Z}$, 则 $0 < \frac{k\pi}{\omega} + \frac{3\pi}{4\omega} <$

$\frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega > 12k + 9, k \in \mathbf{Z}$. 因为

$\omega > 0$, 所以 $\omega > 9$, 又 $\omega = 4k + 3, k \in \mathbf{Z}$, 所

以 ω 的最小值为 11.

6. C 【解析】 对于函数 $y = \sin 2x$, 由 $2x = k\pi$

($k \in \mathbf{Z}$), 可得 $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 所以函数 $y =$

$\sin 2x$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ ($k \in$

\mathbf{Z}). 又因为函数 $y = \tan x$ 图象的对称中心

也为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ ($k \in \mathbf{Z}$), 故函数 $g(x) =$

$\sin 2x + \tan x$ 图象的对称中心为

$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ ($k \in \mathbf{Z}$), 两个相邻对称中心的距



离为 $\frac{\pi}{2}$. 对于正弦型函数 $f(x) = \sin \omega x$

($\omega > 0$), 由 $\omega x = n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$) 可得 $x = \frac{n\pi}{\omega}$ ($n \in$

\mathbf{Z}), 故函数 $f(x)$ 图象的对称中心为

$\left(\frac{n\pi}{\omega}, 0\right)$ ($n \in \mathbf{Z}$), 故函数 $f(x)$ 图象两个相

邻对称中心间的距离为 $\frac{\pi}{\omega}$, 易知原点为函

数 $f(x), g(x)$ 图象的一个公共对称中心.

因为函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 图象的对称

中心都是函数 $g(x) = \sin 2x + \tan x$ 图象的

对称中心, 故存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{m\pi}{2}$

($m \in \mathbf{N}^*$),

→ **关键点** 函数 $g(x)$ 图象的对称中心并不一定是函数 $f(x)$ 图象的对称中心, 所以引入参数 $m \in \mathbf{N}^*$ 建立等式 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{m\pi}{2}$ ($m \in \mathbf{N}^*$)

解得 $\omega = \frac{2}{m}$ ($m \in \mathbf{N}^*$), 只有 C 选项符合要

求. 故选 C.

7. B 【解析】由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 得 $\frac{\pi}{4}\omega +$

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$ 或 $\frac{\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} +$

$\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}$,

即 $\omega = 12k_1, k_1 \in \mathbf{Z}$ 或 $\omega = 2 + 6k_2, k_2 \in \mathbf{Z}$. 因

为 $\omega > 0$, 所以 ω 为正整数, 可以为 12, 24,

36, ... 或 2, 8, 14, 20, ...

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, 得 $\frac{13\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}\omega +$

$\frac{\pi}{6} + 2k_3\pi, k_3 \in \mathbf{Z}$ 或 $\frac{13\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} =$

$\pi + 2k_4\pi, k_4 \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = \frac{12k_3}{5}, k_3 \in \mathbf{Z}$ 或 $\omega =$

$\frac{1+3k_4}{2}, k_4 \in \mathbf{Z}$. 由于 ω 为正整数, 则 ω 可以

为 12, 24, 36, ... 或 2, 5, 8, 11, 14, ...

综上所述, ω 的最小值为 2. 故选 B.

8. D 【解析】令 $2\sin \omega x = 1$, 则 $\sin \omega x = \frac{1}{2}$,

所以 $\omega x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 或 $\omega x = \frac{5\pi}{6} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x = \frac{\pi}{6\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$ 或 $x =$

$\frac{5\pi}{6\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$, 所以相邻交点间的最小距

离为 $\frac{5\pi}{6\omega} - \frac{\pi}{6\omega} = \frac{2\pi}{3\omega}$, 最大距离为 $\frac{\pi}{6\omega} + \frac{2\pi}{\omega} -$



$$\frac{5\pi}{6\omega} = \frac{4\pi}{3\omega}.$$

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由 $y=f(x)$ 的图象在长度为 π 的任意闭区间上与直线 $y=1$ 最少有 3 个交点, 最多有 4 个交点, 故相邻 4 个交点之间的最大距离不大于 π , 相邻 5 个交点之间的距离大于 π , 所以 $\frac{4\pi}{3\omega} +$

$$\frac{2\pi}{3\omega} + \frac{4\pi}{3\omega} = \frac{10\pi}{3\omega} \leq \pi, \text{ 且 } 2T = \frac{4\pi}{\omega} > \pi, \text{ 所以 } \frac{10}{3} \leq \omega < 4. \text{ 故选 D.}$$

9. $\left(\frac{23}{12}, \frac{35}{12}\right)$ 【解析】由函数 $f(x) =$

$$\begin{aligned} \cos \omega x + \cos \left(\omega x + \frac{\pi}{3} \right) &= \cos \omega x + \\ \frac{1}{2} \cos \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x &= \frac{3}{2} \cos \omega x - \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x &= \sqrt{3} \cos \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right), \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = \omega x + \frac{\pi}{6}, \text{ 由 } x \in (0, 2\pi), \text{ 可得 } t \in \left(\frac{\pi}{6}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \right).$$

因为曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\sqrt{3}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 2 个公共点,

所以曲线 $y=\sqrt{3} \cos t$ 与直线 $y=\sqrt{3}$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \right)$ 上有且仅有 2 个公共点,

则这 2 个公共点的横坐标分别为 $2\pi, 4\pi$,

$$\text{则 } 4\pi < 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 6\pi, \text{ 解得 } \frac{23}{12} < \omega \leq \frac{35}{12}, \text{ 即}$$

实数 ω 的取值范围为 $\left(\frac{23}{12}, \frac{35}{12} \right]$.

10. $(4, 5) \cup \left(\frac{11}{2}, +\infty \right)$ 【解析】因为 $f(x_1)$

为函数的最大值, $f(x_2)$ 为函数的最小值,

$$\text{所以 } f(x_1) = A, f(x_2) = -A,$$

$$\text{又 } [f(x_1) - 5][f(x_2) + 3] = -24, \text{ 所以必有 } (A - 5)(-A + 3) = -24, \text{ 解得 } A = 9 \text{ (舍负).}$$

又函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$, 所以

$$9 \cos \varphi = \frac{9}{2}, \text{ 结合 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

则 $f(x) = 9 \cos \left(\omega x + \frac{\pi}{3} \right)$. 因为 $\omega > 0$, 当

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} < \omega x + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} < k\pi, \\ \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} > k\pi + \pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$



得 $\frac{3}{2}k+1 < \omega < 3k-1, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $3k-1 >$

$\frac{3}{2}k+1$, 解得 $k > \frac{4}{3}$.

当 $k=2$ 时, $4 < \omega < 5$;

当 $k \geq 3$ 时, 令 $I_k = \left(\frac{3k+2}{2}, 3k-1 \right) (k \geq 3, k \in$

$\mathbf{Z})$, 当 $k > \frac{7}{3}$ 时, $3k-1 > \frac{3(k+1)+2}{2}$,


故从 $k=3$ 开始, 各区间 $I_k (k \geq 3, k \in \mathbf{Z})$ 相互之间有重叠部分, 区间 $I_k (k \geq 3, k \in \mathbf{Z})$

的并集为 $\left(\frac{11}{2}, +\infty \right)$,

因此 ω 的取值范围是 $(4, 5) \cup \left(\frac{11}{2}, +\infty \right)$.

真题上分

- 1. B** 【解析】由 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 得 $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$, 所以 $\sin \alpha = \cos \beta$ 或 $\sin \alpha = -\cos \beta$, 充分性不成立.

 **易错**: 注意等式两边开方后会有两种情况

由 $\sin \alpha + \cos \beta = 0$, 得 $\sin \alpha = -\cos \beta$, 即 $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta$, 又 $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, 所以 $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta$, 即 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 必要性成立. 所以 “ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ” 是 “ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ” 的必要不充分条件, 即甲是乙的必要条件但不是充分条件. **故选 B.**

- 2. D** 【解析】因为 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos \alpha =$

$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{3}{5}$, 又 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha =$

$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, 则

$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$

$\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$. **故选 D.**

一题多解

因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $0 <$

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2},$$

又因为 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



$$\begin{aligned} \text{故 } \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \\ \frac{\sqrt{5}}{5} &= \frac{4}{5}, \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\ \frac{1}{5} - \frac{4}{5} &= -\frac{3}{5} \quad \left(\text{另解: } \cos \alpha = \right. \\ 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 &= \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} \text{ 或 } \cos \alpha = 1 - \\ 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5} \left. \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \\ \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

故选 D.

3. B 【解析】 $\because \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3},$

$$\therefore \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} = 2$$

$\sqrt{3} - 1$, 故选 B.

4. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】 $\because \tan \alpha + \tan \beta = 4,$

$$\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1,$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

$$\therefore 2k_1\pi < \alpha < 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z},$$

$$2k_2\pi + \pi < \beta < 2k_2\pi + \frac{3\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore 2(k_1 + k_2)\pi + \pi < \alpha + \beta < 2(k_1 + k_2)\pi + 2\pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \therefore \sin(\alpha + \beta) < 0.$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta), \\ \sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1, \end{cases}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

5. B 【解析】正切函数 $y = \tan x$ 图象的对称

中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right) (k \in \mathbf{Z})$. 由点 $(a, 0) (a > 0)$

是函数 $y = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称

中心, 可知 $a - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $a = \frac{\pi}{3} +$

$\frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 由 $a > 0$ 可得, 当 $k = 0$ 时, a 取

得最小值 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

**快解**

若 $a = \frac{\pi}{6}$, 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \neq 0$, 所以 a 不能取 $\frac{\pi}{6}$; 若 $a = \frac{\pi}{3}$, 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以 a 能取 $\frac{\pi}{3}$; 若 $a = \frac{\pi}{2}$, 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{6} \neq 0$, 所以 a 不能取 $\frac{\pi}{2}$; 若 $a = \frac{4\pi}{3}$, 因为 $\tan\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以 a 能取 $\frac{4\pi}{3}$. 因为 $\frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 所以 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

6. D 【解析】 $\because f(x)$ 的最小正周期为 π , 且

$\omega > 0$, $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 得 $\omega = 2$, $\therefore f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, $\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, \therefore 当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $\frac{3}{2}$. 故选 D.

7. C 【解析】 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$. $\because f(x + \pi) = f(x)$ 恒成立,

$\therefore \pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期, $\therefore \pi = \frac{m \cdot 2\pi}{\omega}$ ($m \in \mathbf{N}^*$), 则 $\omega = 2m$ ($m \in \mathbf{N}^*$).

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $2mx + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$. $\because f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点, $\therefore \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \geq \pi$, 即 $m \geq \frac{3}{2}$. 又 $m \in \mathbf{N}^*$, \therefore 当 $m = 2$ 时, ω 取得最小值, 最小值为 4, 故选 C.

8. C 【解析】令 $3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, 则

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k_1\pi}{3}, k_1 \in \mathbf{Z},$$

又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x = \frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$.

令 $3x - \frac{\pi}{6} = k_2\pi$, $k_2 \in \mathbf{Z}$, 则 $x = \frac{\pi}{18} +$



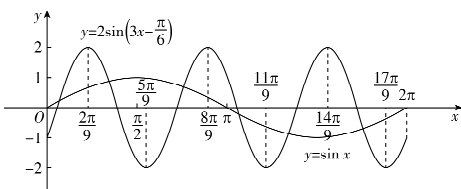
$$\frac{k_2\pi}{3}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x = \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{19\pi}{18},$

$\frac{25\pi}{18}, \frac{31\pi}{18}$, 如图, 作出函数 $y = \sin x$ 与 $y =$

$2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的大致图象, 由

图可知, 两函数图象共有 6 个交点. 故
选 C.



9. BC 【解析】对于 A, 令 $f(x) = 0$, 则

$2x = k_1\pi (k_1 \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{k_1\pi}{2} (k_1 \in \mathbf{Z})$, 令

$g(x) = 0$, 则 $2x - \frac{\pi}{4} = k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$, 解得

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2} (k_2 \in \mathbf{Z})$, 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无

相同零点, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值都为 1, 故 B
正确;

对于 C, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期都是
 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $2x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi (k_3 \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{4}$

$+\frac{k_3\pi}{2} (k_3 \in \mathbf{Z})$, 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k_4\pi (k_4 \in$

$\mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{3}{8}\pi + \frac{k_4\pi}{2} (k_4 \in \mathbf{Z})$, 故 $f(x)$ 与 g

(x) 的图象无相同的对称轴, 故 D 错误. 故
选 BC.

10. A 【解析】因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单

调递增, 所以 $\frac{\pi}{12} - \left(-\frac{5\pi}{12}\right) \leq \frac{T}{2}$, 即 $0 <$
 $\omega \leq 2$.

因为直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称

轴, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称
中心,

所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{T}{4} + \frac{k_1T}{2} (k_1 \in \mathbf{N})$, 即 $\omega =$

$2(1+2k_1) (k_1 \in \mathbf{N})$, 故 $\omega = 2$, 所以 $f(x) =$



$$\sin(2x+\varphi), \text{ 又 } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right) = 1,$$

提示: $\frac{\pi}{12}$ 是单调递增区间的右端

点, 故 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$

$$\text{故 } \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 则 } \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z}).$$

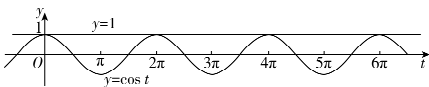
$$\text{因为 } -\pi < \varphi < \pi, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

$$\text{所以 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right].$$

$$\text{故当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } f(x) \text{ 的最小值为 } -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 A.}$$

11. [2, 3) 【解析】令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$, 得 $\cos \omega x = 1$, 又 $x \in [0, 2\pi]$, 则 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 令 $t = \omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 所以 $y = \cos t$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $[0, 2\omega\pi]$ 有且仅有 3 个交点, 如图, 所以 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.



一题多解 令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0 (\omega > 0)$, 得 $\cos \omega x = 1$, 即 $\omega x = 2k\pi (\omega > 0)$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{2k\pi}{\omega} (\omega > 0)$, $k \in \mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 的 3 个

零点对应 $k = 0, 1, 2$, 所以 $f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) =$

$$f\left(\frac{4\pi}{\omega}\right) = 0 \text{ 且 } \frac{4\pi}{\omega} \leq 2\pi < \frac{6\pi}{\omega}, \text{ 解得 } 2 \leq \omega < 3, \text{ 即 } \omega \text{ 的取值范围是 } [2, 3).$$

12. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】设 $A\left(x_1, \frac{1}{2}\right), B\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$, 由五点作图法可得

$$\begin{cases} \omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}, & \text{①} \\ \omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①}, \text{ 得 } \omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{因为 } |AB| = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } \omega = 4.$$



因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$, 所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 所以 $\frac{8\pi}{3} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

由题图可知 $-1 < f(0) < 0$, 即 $-1 < \sin \varphi < 0$,

所以取 $k = 1$, 则 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) =$

$\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $f(\pi) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



第五章 全章上分

1. B 【解析】对于 A, 如 $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$,

两个角不相等但终边重合, 故 A 错误; 对

于 B, 扇形所在圆的半径 $r = \frac{l}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$, 因

此扇形的面积为 $\frac{1}{2}rl = \frac{3}{2}\pi$, 故 B 正确; 对

于 C, 终边落在直线 $y = x$ 上的角, 在第一

象限的角为 $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 在第三

象限的角为 $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}$, 故终边

落在直线 $y = x$ 上的角的集合为

$\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 故 C 错误; 对于

D, 若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 则 $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ 是锐角, 不是钝角,

故 D 错误. 故选 B.

2. D 【解析】 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 3}$

$$= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{-2\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\tan \alpha}{-1 - 2\tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{-1 - 2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

故选 D.

3. D 【解析】对于 A, 由二倍角公式可得 $\cos 2^\circ = 1 - 2\sin^2 1^\circ$;

对于 B, 由二倍角公式可得 $\cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1$;

对于 C, 因为 $\tan 2^\circ = \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}$, 所以

$$\frac{\sin 2^\circ}{\tan 2^\circ} = \cos 2^\circ;$$

对于 D, 由二倍角公式可得 $2\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ = \sin 2^\circ \neq \cos 2^\circ$.

故选 D.

4. D 【解析】 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x =$

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1, \text{ 由}$$

$$x \in [0, \pi] \text{ 得 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right], \text{ 当 } 2x +$$



$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取最大值 3, A

错误;

由正弦函数的单调性知, 当 $2x + \frac{\pi}{6} \in$

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 即 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递

增, 当 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\right]$, 即 $x \in$

$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增, B 错误;

$f(x)$ 的定义域 $[0, \pi]$ 不关于 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称, C

错误;

令 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2$, 则 $\sin\left(2x +$

$\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$, 所以

$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 或 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ 或 $2x + \frac{\pi}{6} =$

$\frac{13\pi}{6}$, 即 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $x = \pi$, 故所有公共

点的横坐标之和为 $\frac{4\pi}{3}$, D 正确. 故选 D.

5. B 【解析】设 $y = \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| <$

π) 的周期为 $T, t_3 - t_1 = T, t_4 - t_2 = T$, 根据 $t_1 +$

$2t_2 + t_3 = 12, t_2 + 2t_3 + t_4 = 28$, 可知 $2t_1 + 2t_2 +$

$T = 12$ ①, $2t_2 + 2t_3 + T = 28$ ②, ② - ① 得 $2t_3 -$

$2t_1 = 2T = 16$, 所以 $T = 8$, 又 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 所以

$\omega = \frac{\pi}{4}$.

令 $2k\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}t + \varphi < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 可得

$8k + \frac{2}{3} - \frac{4\varphi}{\pi} < t < 8k + \frac{10}{3} - \frac{4\varphi}{\pi}, k \in \mathbf{Z}$, 所以在

一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移

大于 0.5 m 的总时间为 $8k + \frac{10}{3} - \frac{4\varphi}{\pi} -$

$\left(8k + \frac{2}{3} - \frac{4\varphi}{\pi}\right) = \frac{8}{3}(\text{s})$. 故选 B.

6. C 【解析】 $f(x) = 2\sin \omega x \cdot \cos^2\left(\frac{\omega x}{2} -$

$\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2 \omega x = 2\sin \omega x \cdot \frac{1 + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} -$

$\sin^2 \omega x = \sin \omega x (1 + \sin \omega x) - \sin^2 \omega x = \sin \omega x$.

由 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 得

$$\begin{cases} -\frac{2\pi}{5}\omega \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{2}\omega \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \text{即}$$



$$\begin{cases} \omega \leq \frac{5}{4} - 5k, \\ \omega \leq 1 + 4k, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所以 } 0 < \omega \leq 1.$$

因为在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$ 上, 方程 $|f(x)| = 1$ 恰好有两个不同的解, 且 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ 时, $\omega x \in \left[-\frac{\pi}{6}\omega, 0\right]$, 方程 $|f(x)| = 1$ 无解, 所以 $\frac{3\pi}{2} \leq 2\pi\omega < \frac{5\pi}{2}$, 又 $0 < \omega \leq 1$, 故 $\frac{3}{4} \leq \omega \leq 1$. 故选 C.

7. **ACD** 【解析】因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}$, 所

以 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{25}$, 则 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha +$

$2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{25}$, 即 $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{12}{25} < 0$, 又

$\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha > 0$, 则 $\cos \alpha < 0$.

$$\text{联立 } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}, \\ \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{12}{25}, \end{cases} \text{ 解得 } \sin \alpha =$$

$\frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$, 故 A 错误.

对于 B, $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{7}{5}$, 故

B 正确.

对于 C, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$, 则

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{15}, \text{ 故 C 错误.}$$

$$\text{对于 D, } \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{3\sin \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{3 \times \frac{3}{5} + 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)} =$$

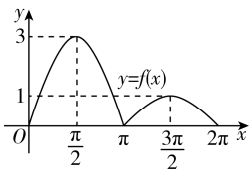
7, 故 D 错误. 故选 ACD.

8. **AB** 【解析】当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\sin x \geq 0$; 当 $x \in (\pi, 2\pi]$ 时, $\sin x \leq 0$.

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -\sin x, & \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

有 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$, 作出 $f(x)$

在 $[0, 2\pi]$ 上的图象如图所示.





由直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象有三个交点, 可知 $a=0$ 或 $a=1$.

故选 AB.

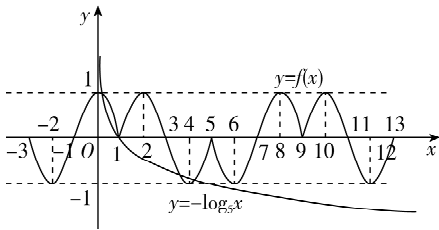
- 9. BCD** 【解析】因为 $f(x-1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x-1) = -f(x-1)$, 即 $f(-x) = -f(x-2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 中心对称, 又 $f(x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+1) = f(x+1)$, 即 $f(-x) = f(x+2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 轴对称, $f(x+2) = -f(x-2)$, 则有 $f(x+4) = -f(x)$, 则 $f(x+8) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数. 由题知 $f(0) = 1$, 将 $x=0$ 代入 $f(x+4) = -f(x)$ 中, 得 $f(4) = -f(0) = -1$, $f(4) \neq f(0)$, 故 $f(x)$ 的周期不是 4, 故 A 错误.

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3} + 2\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3} - 2\right) = -f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \text{故 B 正确.}$$

当 $x \in [-1, 0]$ 时, $\frac{\pi x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 则 $f(x)$

在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 又 $f(-1) = 0$ 且 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 中心对称, 所以 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上单调递增, 又因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 轴对称, 所以 $f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上单调递减, 故 C 正确.

方程 $f(x) + \log_5 x = 0$ 不同的解的个数, 即为函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-\log_5 x$ 图象的交点的个数, 如图, 作出两函数的图象, 由图可知, 两函数的图象有 4 个不同的交点, 即方程 $f(x) + \log_5 x = 0$ 有且仅有 4 个不同的解, 故 D 正确.



故选 BCD.

- 10. $\frac{2\pi}{3}$** 【解析】由 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2}{1 - \tan A \tan C}$ 可得

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2 \cos A \cos C}{\cos A \cos C - \sin A \sin C} = \frac{2 \cos A \cos C}{\cos(A+C)}.$$

又 $\cos(A+C) = -\cos B$, $\cos A \neq 0$, 所以

$$\frac{1}{\cos B} = \frac{2 \cos C}{-\cos B}, \text{解得 } \cos C = -\frac{1}{2}.$$

因为 $\frac{\pi}{2} < C < \pi$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.



11. $\frac{5\pi}{18}$ 【解析】设函数 $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度后得到的图象对应的函数为 $g(x)$,
 可得 $g(x) = 2\sin\left[3\left(x - \varphi\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(3x - 3\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$, 定义域为 \mathbf{R} ,
 因为 $g(x)$ 为奇函数, 可得 $g(0) = 2\sin\left(-3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 即 $\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = 0$,
 因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{6} < 3\varphi + \frac{\pi}{6} < \frac{19\pi}{6}$,
 则 $3\varphi + \frac{\pi}{6} = \pi$ 或 $3\varphi + \frac{\pi}{6} = 2\pi$ 或 $3\varphi + \frac{\pi}{6} = 3\pi$, 解得 $\varphi = \frac{5\pi}{18}$ 或 $\varphi = \frac{11\pi}{18}$ 或 $\varphi = \frac{17\pi}{18}$,
 又当 $\varphi = \frac{5\pi}{18}$ 时, $g(x) = 2\sin\left(3x - 3 \times \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{6}\right) = -2\sin 3x$ 为奇函数,
 故 φ 的最小值为 $\frac{5\pi}{18}$.

12. (1) $\frac{100+2x}{100+x}, x \in (0, 100)$ (2) 3



思路导引 (1) 利用弧长公式求

\widehat{AB} 与 \widehat{DC} , 根据扇环周长可得 θ 关于 x 的函数关系式; (2) 根据扇形面积公式求出扇环面积, 进而得出砖雕面积与雕刻费用之比, 再利用基本不等式即可求解.

【解析】(1) 由题意可知, $\angle AOB = \theta$ rad, $OA = x$ cm, $OD = 100$ cm, 所以 $\widehat{AB} = \theta x$ cm, $AD = BC = (100 - x)$ cm, $\widehat{DC} = 100\theta$ cm, 扇环周长为 $\widehat{AB} + AD + BC + \widehat{DC} = \theta x + 200 - 2x + 100\theta = 300$ (cm), 则 $\theta(x) = \frac{100+2x}{100+x}, x \in (0, 100)$.

(2) 砖雕面积即为题图中扇环面积, 记为 S , 则 $S = S_{\text{扇形}DOC} - S_{\text{扇形}AOB} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot \widehat{DC} - \frac{1}{2} \cdot OA \cdot \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 100 \times 100\theta - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \theta x = 5000\theta - \frac{\theta}{2}x^2 = \left(5000 - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{100+2x}{100+x}$, 设砖雕面积与雕刻费用之比



为 m ,

$$\text{则 } m = \frac{S}{w(x)} = \frac{(10\,000 - x^2)(100 + 2x)}{2(100 + x)(10x + 1\,700)} = \frac{(100 - x)(50 + x)}{10(x + 170)}.$$

令 $t = x + 170$ ($170 < t < 270$), 则 $x = t - 170$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } m &= \frac{(270 - t)(t - 120)}{10t} = \frac{-t^2 + 390t - 120 \times 270}{10t} = -\frac{t}{10} - \frac{12 \times 270}{t} + \\ &39 \leq -2\sqrt{\frac{t}{10} \cdot \frac{12 \times 270}{t}} + 39 = -36 + 39 = 3, \end{aligned}$$

当且仅当 $t = 180$ 时取等号, 所以砖雕面积与雕刻费用之比的最大值为 3.

13. 【解】(1) $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ($\omega > 0$)

的最小正周期为 π , 则 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\omega = 2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in$$

$$\mathbf{Z}, \text{ 解得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$.

$$(3) \text{ 因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时, } f(x)_{\max} =$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3;$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x)_{\min} =$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3} + 1.$$

故 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 3,

此时 $x = \frac{\pi}{12}$; 最小值为 $-\sqrt{3} + 1$, 此时 $x = \frac{\pi}{2}$.

14. 【解】(1) 由于点 P 在单位圆 O 上, 且 α

是锐角, 可得 $m > 0, m^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, 则 $m =$

$\frac{1}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, 又 α 为锐角, 所以

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$



$$(2) \text{ 原式} = \frac{4\cos^3 \alpha + 2\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha}{2 + 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} =$$

$$2\cos \alpha = 1.$$

(3) 由(1)可知 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 根据三角函数定

义可得 $f(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

由 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 得 $\theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$,

因为 $f\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} > 0$,

所以 $\theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\begin{aligned} & \text{所以 } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left[\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] + \cos\left[\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \pi\right] \\ &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{15}-1}{4}. \end{aligned}$$

15. 【解】(1) 由图可知 $A = \frac{1}{3}$, 最小正周期

$$T = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) \times 4 = \pi, \text{ 故 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{1}{3}\cos(2x + \varphi),$$

代入 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{3}\right)$, 可得 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$, 故 $\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

由于 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 故取 $k = 0$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) 由 $f(x) \leq \frac{1}{6}$, 可得 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$,

$$\text{则有 } \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

所以不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(3) 由 $9f^2(x) + a\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}a - \frac{3}{2} = 0$, 可得 $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + a\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}a - \frac{3}{2} = 0$,



$$\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}a - \frac{3}{2} = 0,$$

$$\text{即 } \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + a \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4}a - \frac{3}{2} = 0, \text{ 故 } \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - a \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} = 0,$$

→ **关键点** 解与三角函数有关的方程通常转化为只含有一种函数名和一个角的方程

该方程在 $\left(0, \frac{3\pi}{4} \right)$ 上有四个不同的实数

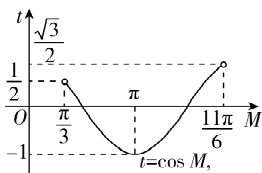
根, 令 $t = \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$,

则 $t^2 - at + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} = 0$, 由 $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4} \right)$,

得 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \right)$, $t \in \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$,

令 $M = 2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \right)$,

如图①所示, 要使 $\cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - a \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} = 0$ 在 $\left(0, \frac{3\pi}{4} \right)$ 上有四个不同的实数根,



图①

则需要 $t^2 - at + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} = 0$, 即 $t^2 + \frac{1}{2} =$

$a \left(t - \frac{1}{4} \right)$ 在 $\left(-1, \frac{1}{2} \right)$ 上有两个不相等的实数根,

由于 $t = \frac{1}{4}$ 时, $t^2 + \frac{1}{2} = a \left(t - \frac{1}{4} \right)$ 无解,

故 $t \neq \frac{1}{4}$,

则 $\frac{t^2 + \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{4}} = a$, 令 $t - \frac{1}{4} = s$, 则 $s \in \left(-\frac{5}{4},$

$\frac{1}{4} \right)$ 且 $s \neq 0$, 故 $s \in \left(-\frac{5}{4}, 0 \right) \cup$

$\left(0, \frac{1}{4} \right)$ 时, $a = s + \frac{9}{16s} + \frac{1}{2}$ 有两个不相等的实数根,

作出 $y = s + \frac{9}{16s} + \frac{1}{2}$ 在 $\left(-\frac{5}{4}, 0 \right) \cup$

$\left(0, \frac{1}{4} \right)$ 上的图象如图②所示, 当 $s = -\frac{5}{4}$

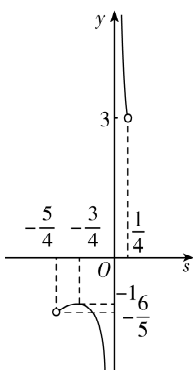


$$\text{时}, y = -\frac{5}{4} + \frac{9}{16} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{6}{5},$$

$$\text{当 } s < 0 \text{ 时}, y = s + \frac{9}{16s} + \frac{1}{2} = -\left(-s + \frac{9}{-16s}\right) + \frac{1}{2} \leqslant -2\sqrt{\frac{9}{16}} + \frac{1}{2} = -1,$$

当且仅当 $s = -\frac{3}{4}$ 时, 取等号, 故实数 a 的

取值范围为 $\left\{a \mid -\frac{6}{5} < a < -1\right\}$.



图②